



Automorphismes réels d'un fibré, opérateurs de Cauchy-Riemann et orientabilité d'espaces de modules

Rémi Crétois

► To cite this version:

Rémi Crétois. Automorphismes réels d'un fibré, opérateurs de Cauchy-Riemann et orientabilité d'espaces de modules. Géométrie symplectique [math.SG]. Université Claude Bernard - Lyon I, 2011. Français. NNT: . tel-00656631

HAL Id: tel-00656631

<https://theses.hal.science/tel-00656631>

Submitted on 4 Jan 2012

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

Numéro d'ordre : 331-2011

Année 2011

Université Claude Bernard - Lyon 1

Institut Camille Jordan - CNRS UMR 5208
École doctorale Infomaths

THÈSE DE L'UNIVERSITÉ DE LYON

pour l'obtention du

Diplôme de doctorat
Spécialité : mathématiques
(arrêté du 7 août 2006)

présentée par

Rémi CRÉTOIS

Automorphismes réels d'un fibré, opérateurs de Cauchy-Riemann et orientabilité d'espaces de modules

Thèse dirigée par Jean-Yves Welschinger
soutenue publiquement le 8 décembre 2011

Après avis de :

Yakov ELIASHBERG	Université de Stanford	Rapporteur
Claude VITERBO	École Normale Supérieure	Rapporteur

Devant le jury composé de :

Ilia ITENBERG	Université Paris 6	Examineur
Grigory MIKHALKIN	Université de Genève	Examineur
Jean-Claude SIKORAV	École Normale Supérieure de Lyon	Examineur
Claude VITERBO	École Normale Supérieure	Rapporteur
Jean-Yves WELSCHINGER	CNRS et Université Lyon 1	Directeur de Thèse

Rémi CRÉTOIS

AUTOMORPHISMES RÉELS
D'UN FIBRÉ, OPÉRATEURS
DE CAUCHY-RIEMANN ET
ORIENTABILITÉ D'ESPACES
DE MODULES

R. Crétois

AUTOMORPHISMES RÉELS D'UN FIBRÉ, OPÉRATEURS DE CAUCHY-RIEMANN ET ORIENTABILITÉ D'ESPACES DE MODULES

Rémi CRÉTOIS

Résumé. — L'ensemble des opérateurs de Cauchy-Riemann réels sur un fibré vectoriel complexe N muni d'une structure réelle c_N au-dessus d'une courbe réelle (Σ_g, c_Σ) est un espace affine de dimension infinie. Le fibré déterminant au-dessus de cet espace est un fibré en droites réelles dont la fibre en un opérateur $\bar{\partial}$ est la droite $\Lambda^{\max} H_{\bar{\partial}}^0(\Sigma_g, N)_{+1} \otimes \left(\Lambda^{\max} H_{\bar{\partial}}^1(\Sigma_g, N)_{+1} \right)^*$. L'objet de cette thèse est l'étude de l'action des automorphismes du fibré (N, c_N) sur les orientations de ce fibré déterminant ainsi que de ses conséquences sur l'orientabilité des espaces de modules de courbes réelles dans une variété symplectique réelle.

Nous commençons par interpréter l'action des automorphismes qui induisent l'identité sur le fibré en droites complexes $\det(N)$ en termes d'action sur les structures Pin^\pm de la partie réelle de N . Un tel automorphisme préserve les orientations du fibré déterminant si et seulement s'il échange les structures Pin^\pm d'un nombre pair de composantes de $\mathbb{R}N$.

Nous remarquons ensuite qu'un automorphisme au-dessus de l'identité agit sur les classes de bordisme de structures $Spin$ réelles de (Σ_g, c_Σ) et nous utilisons cette action afin d'obtenir une description en termes topologiques de l'action sur les orientations du fibré déterminant. Nous montrons en particulier que lorsque N est de rang un et que son degré a même parité que $g + 1$, alors l'action d'un automorphisme de N au-dessus de l'identité sur les orientations du fibré déterminant coïncide avec son action sur les classes de bordisme de structures $Spin$ réelles de (Σ_g, c_Σ) de même première classe de Stiefel-Whitney que la partie réelle de N .

Enfin, pour comprendre l'action des automorphismes de (N, c_N) qui ne relèvent pas l'identité, nous introduisons la notion de relevé d'un difféomorphisme de Σ_g associé à un diviseur compatible avec (N, c_N) et nous calculons le signe de l'action d'un tel relevé sur les orientations du fibré déterminant.

Dans une dernière partie, nous appliquons les résultats obtenus à l'étude de l'orientabilité des espaces de modules de courbes réelles dans des variétés symplectiques réelles. Nous calculons en particulier la première classe de Stiefel-Whitney de l'espace de modules des courbes réelles dans l'espace projectif complexe de dimension trois.

Abstract. — We consider a complex vector bundle N equipped with a real structure c_N over a real curve (Σ_g, c_Σ) . The set of all real Cauchy-Riemann operators on (N, c_N) is an infinite dimensional affine space. The determinant bundle over this space is a real line bundle $\text{Det}(N)$ whose fiber at an operator $\bar{\partial}$ is the line $\Lambda^{\max} H_{\bar{\partial}}^0(\Sigma_g, N)_{+1} \otimes \left(\Lambda^{\max} H_{\bar{\partial}}^1(\Sigma_g, N)_{+1} \right)^*$. The aim of this work is to study the action of the automorphism group of (N, c_N) on the orientations of $\text{Det}(N)$ and to deduce some results concerning the orientability of the moduli spaces of real curves in a real symplectic manifold.

We first compute the action of the automorphisms which induce the identity on the complex line bundle $\det(N)$ in terms of Pin^\pm structures on the real part of (N, c_N) . We show that such an automorphism preserves the orientations of $\text{Det}(N)$ if and only if it exchanges the Pin^\pm structures of an even number of components of $\mathbb{R}N$.

We then note that an automorphism of (N, c_N) which lifts the identity of Σ_g acts on the bordism classes of real Spin structures on (Σ_g, c_Σ) . We use this action to give a topological description of the action on the orientations of $\text{Det}(N)$. We show for example that when N is a line bundle such that $\deg(N) = g + 1 \pmod{2}$, then the action on the orientations of $\text{Det}(N)$ of an automorphism lifting id_Σ is the same as its action on the bordism classes of real Spin structures on (Σ_g, c_Σ) which have the same first Stiefel-Whitney class as $\mathbb{R}N$.

Finally, we introduce the notion of a lift of a diffeomorphism of Σ_g associated to a divisor compatible with (N, c_N) . Those are automorphisms of (N, c_N) for which we can compute explicitly the action on the orientations of $\text{Det}(N)$.

The last part is devoted to some applications to the study of the orientability of moduli spaces of real curves in a real symplectic manifold. We compute for example, the first Stiefel-Whitney class of such moduli spaces in the case of the complex projective space of dimension three.

INTRODUCTION

Une variété symplectique (X, ω) est dite réelle si elle est munie d’une involution $c_X : X \rightarrow X$ anti-symplectique. Dans ce cas, on note $\mathbb{R}J_\omega(X)$ l’ensemble des structures presque complexes sur X qui sont compatibles avec ω et pour lesquelles c_X est anti-holomorphe. Prenons $d \in H_2(X, \mathbb{Z})$ tel que $(c_X)_*d = -d$ et fixons $g, m \in \mathbb{N}$ de telle sorte que $c_1(X)d + (n - 3)(1 - g) + m \geq 0$, où $n = \frac{\dim X}{2}$. Pour chaque $J \in \mathbb{R}J_\omega(X)$, l’espace de modules $\mathbb{R}\mathcal{M}_{g,m}^d(X, J)$ est l’ensemble des courbes réelles J -holomorphes dans X qui sont de genre g , de degré d et munies de m points marqués. Lorsque $J \in \mathbb{R}J_\omega(X)$ est générique, $\mathbb{R}\mathcal{M}_{g,m}^d(X, J)$ est une variété de dimension $c_1(X)d + (n - 3)(1 - g) + m$. Le point de départ de cette thèse est la question suivante : quelle est la première classe de Stiefel-Whitney de $\mathbb{R}\mathcal{M}_{g,m}^d(X, J)$?

Dans leurs travaux sur l’homologie de Floer, Fukaya, Oh, Ohta et Ono ([11]) ont introduit la notion de sous-variété relativement *Spin* et montré que lorsque $\mathbb{R}X$ est relativement *Spin*, l’espace des disques pseudo-holomorphes à bord dans $\mathbb{R}X$ et sans point marqué est orientable. D’autre part, Welschinger ([30], [29] et [31]) a montré l’importance de ce problème en géométrie énumérative réelle. La définition de ses invariants lui a notamment permis de donner un représentant géométrique du dual de cette première classe de Stiefel-Whitney dans le cas des variétés projectives réelles lisses et convexes de dimension deux et trois. Ce résultat a ensuite été précisé par Puignau ([24]). De son côté, Cho ([7]) a repris la définition des invariants de Welschinger en utilisant les techniques de [11], de même que Solomon ([27]) qui les a étendus à des surfaces à bord de genre plus élevé et aux variétés symplectiques de dimension six quelconques.

Avant de s’attaquer à la question de l’orientabilité des espaces de modules de courbes réelles dans des variétés réelles on s’intéresse au problème « linéaire » associé que nous décrivons maintenant. Soit Σ_g une surface compacte connexe sans bord et orientée de genre g . Une structure réelle sur Σ_g est la donnée d’une involution $c_\Sigma : \Sigma_g \rightarrow \Sigma_g$ qui renverse l’orientation. Nous dirons alors que le couple (Σ_g, c_Σ) est une courbe réelle. Notons $\mathbb{R}J(\Sigma_g)$ l’ensemble des structures complexes de Σ_g compatibles avec l’orientation fixée et pour lesquelles c_Σ est anti-holomorphe. Considérons un fibré vectoriel complexe N sur Σ_g . Une structure réelle sur N est une involution $c_N : N \rightarrow N$, \mathbb{C} -antilinéaire dans les fibres et qui relève c_Σ .

Définition. — Fixons une structure complexe $J \in \mathbb{R}J(\Sigma_g)$, un entier $k \geq 1$ et un réel $p > 1$ tels que $kp > 2$. Un opérateur de Cauchy-Riemann réel sur (N, c_N)

est un opérateur \mathbb{C} -linéaire

$$\bar{\partial} : L^{k,p}(\Sigma_g, N) \rightarrow L^{k-1,p}(\Sigma_g, \Lambda^{0,1}\Sigma_g \otimes N)$$

équibariant sous l'action de c_N et vérifiant la règle de Leibniz :

$$\forall f \in \mathcal{C}^\infty(\Sigma_g, \mathbb{C}), \forall v \in \Gamma(\Sigma_g, N), \bar{\partial}(fv) = \bar{\partial}_J(f) \otimes v + f\bar{\partial}(v),$$

$$\text{où } \bar{\partial}_J = \frac{1}{2}(d + i \circ d \circ J).$$

La structure réelle c_N induit une involution \mathbb{C} -antilinéaire sur l'espace de Banach $L^{k,p}(\Sigma_g, N)$ des sections $L^{k,p}$ de N et sur $L^{k-1,p}(\Sigma_g, \Lambda^{0,1}\Sigma_g \otimes N)$. Nous notons avec un indice $+1$ (resp. -1) le sous-espace propre associé à la valeur propre $+1$ (resp. -1). Un opérateur de Cauchy-Riemann réel $\bar{\partial}$ induit par restriction un opérateur Fredholm de $L^{k,p}(\Sigma_g, N)_{+1}$ dans $L^{k-1,p}(\Sigma_g, \Lambda^{0,1}\Sigma_g \otimes N)_{+1}$. Nous notons respectivement $H_{\bar{\partial}}^0(\Sigma_g, N)_{+1}$ et $H_{\bar{\partial}}^1(\Sigma_g, N)_{+1}$ le noyau et le conoyau de l'opérateur obtenu. Par régularité elliptique, ces deux espaces vectoriels ne dépendent ni de k ni de p . Il existe sur l'ensemble $\mathbb{RC}(N)$ des opérateurs de Cauchy-Riemann réels sur (N, c_N) un fibré en droites réelles $\text{Det}(N)$ dont la fibre au-dessus de l'opérateur $\bar{\partial}$ est son déterminant $\text{Det}(\bar{\partial}) = \Lambda_{\mathbb{R}}^{\max} H_{\bar{\partial}}^0(\Sigma_g, N)_{+1} \otimes \left(\Lambda_{\mathbb{R}}^{\max} H_{\bar{\partial}}^1(\Sigma_g, N)_{+1} \right)^*$. Comme $\mathbb{RC}(N)$ est un espace contractile, le fibré $\text{Det}(N)$ est orientable. La majeure partie de ce mémoire est consacrée à l'étude de l'action des automorphismes de (N, c_N) sur les orientations du fibré $\text{Det}(N)$.

On peut considérer plusieurs formulations de ce problème. Une première consiste à se donner explicitement un automorphisme de (N, c_N) puis à calculer son action sur les orientations de $\text{Det}(N)$. Une seconde, plus forte, est : relier l'action des automorphismes de (N, c_N) sur les orientations de $\text{Det}(N)$ à leur action sur des objets topologiques. Plus précisément, il s'agit de déterminer exactement à quelles conditions topologiques un automorphisme préserve les orientations de $\text{Det}(N)$. Enfin, une troisième formulation encore plus exigeante consiste à trouver un fibré en droites réelles sur $\mathbb{RC}(N)$, défini en termes topologiques et canoniquement isomorphe à $\text{Det}(N)$. Nous parvenons dans cette thèse à répondre complètement à la première question, et à la seconde dans le cas des automorphismes au-dessus de l'identité. En ce qui concerne les automorphismes relevant un difféomorphisme non trivial, nous arrivons à répondre à la deuxième formulation lorsque la courbe (Σ_g, c_Σ) est séparante, c'est-à-dire lorsque $\Sigma_g \setminus \mathbb{R}\Sigma_g$ n'est pas connexe, ou bien lorsque le fibré (N, c_N) est de partie réelle orientable et est muni d'une structure *Spin* réelle. Enfin, nous résolvons le troisième problème dans le dernier chapitre en faisant les mêmes hypothèses que précédemment.

La première partie de ce mémoire consiste en des préliminaires concernant les automorphismes d'un fibré réel (N, c_N) . Nous décrivons notamment la structure des classes d'homotopie de tels automorphismes. Deux sous-groupes du groupe $\mathbb{RAut}(N)$ des automorphismes de (N, c_N) apparaissent alors. Le groupe $\mathbb{RGL}(N)$ des automorphismes au-dessus de l'identité et parmi ceux-ci, le groupe $\mathbb{RSL}(N)$ des automorphismes de déterminant 1. Nous montrons de plus qu'un automorphisme de déterminant 1 est déterminé à homotopie près par sa restriction à la partie réelle de N .

Partant des remarques de cette première partie, nous divisons notre étude en trois. Dans le second chapitre, nous nous intéressons aux automorphismes de (N, c_N) qui sont de déterminant 1. Nous relierons l'action de ces automorphismes

sur les orientations de $\text{Det}(N)$ à leur action sur les structures Pin^\pm de la partie réelle de N . En particulier, nous obtenons le résultat suivant.

Théorème. — *Soit t un automorphisme de (N, c_N) relevant l'identité et de déterminant 1. Alors t préserve les orientations du fibré $\text{Det}(N)$ si et seulement si le nombre de composantes de $\mathbb{R}N$ dont les structures Pin^\pm sont échangées sous l'action de t est pair.*

Ce résultat fournit donc une première réponse à la seconde formulation de la question qui nous intéresse.

Dans la suite du mémoire, nous supposons que les courbes réelles considérées sont de partie réelle non vide. Le cas d'une courbe sans point réel reste à traiter, ce que nous avons l'intention de faire prochainement.

Dans le troisième chapitre, nous passons à l'étude des automorphismes de (N, c_N) qui relèvent l'identité. Nous commençons par nous ramener au cas où N est un fibré de rang 1 en remarquant que l'action sur les orientations de $\text{Det}(N)$ d'un élément f de $\mathbb{R}GL(N)$ est la même que celle de son déterminant sur les orientations de $\text{Det}(\det(N))$ si et seulement si le nombre de composantes de $\mathbb{R}N$ dont les structures Pin^\pm sont échangées par f est pair. Nous montrons alors qu'un automorphisme de (N, c_N) au-dessus de l'identité agit sur les classes de bordisme de structures Spin réelles de (Σ_g, c_Σ) . Étant fixée une structure complexe sur (Σ_g, c_Σ) , une structure Spin réelle de (Σ, c_Σ) est la donnée d'un fibré en droites holomorphe L admettant une structure réelle et dont le carré est isomorphe au fibré canonique K_Σ . Une telle structure Spin réelle possède une première classe de Stiefel-Whitney qui n'est autre que $w_1(\mathbb{R}L)$. On dit que deux structures Spin réelles sont dans la même classe de bordisme réelle si elles ont même première classe de Stiefel-Whitney et si elles sont bordantes en tant que structures Spin , c'est-à-dire si elles ont même invariant d'Arf. Nous relierons ensuite l'action des éléments de $\mathbb{R}GL(N)$ sur les orientations de $\text{Det}(N)$ à leur action sur ces classes de bordisme de structures Spin réelles. Nous démontrons en particulier :

Théorème. — *Soit (N, c_N) un fibré vectoriel complexe de rang 1 muni d'une structure réelle sur (Σ_g, c_Σ) , de partie réelle non vide. Si $\deg(N) = g + 1 \pmod{2}$, alors l'action d'un automorphisme $f \in \mathbb{R}GL(N)$ sur les orientations de $\text{Det}(N)$ coïncide avec l'action de f sur les classes de bordisme de structures Spin réelles de (Σ_g, c_Σ) de même première classe de Stiefel-Whitney que $\mathbb{R}N$.*

Lorsque $\deg(N) = g \pmod{2}$, l'automorphisme $-\text{id}_N$ préserve toutes les structures Spin réelles de (Σ_g, c_Σ) , mais renverse les orientations de $\text{Det}(N)$ d'après le Théorème de Riemann-Roch. Nous modifions l'énoncé du Théorème précédent en tenant compte de l'action de f sur les orientations des composantes orientables de $\mathbb{R}N$ afin d'obtenir, comme dans le cas des automorphismes de déterminant 1, une interprétation en termes topologiques de l'action de $\mathbb{R}GL(N)$ sur les orientations de $\text{Det}(N)$ (voir le Théorème 3.5).

En guise d'application, nous calculons la première classe de Stiefel-Whitney du fibré en droites réelles induit par le fibré déterminant sur le groupe de Picard réel d'une surface de Riemann réelle (Σ_g, c_Σ) (voir les Théorèmes 3.6 et 3.7).

Dans la quatrième partie nous prenons en compte la contribution des automorphismes de (N, c_N) qui ne relèvent pas l'identité. Nous commençons par traiter le cas particulier où N est le fibré tangent à la courbe. Ceci nous permet de calculer

l'action du groupe $\Gamma(\Sigma_g, c_\Sigma)$ des difféotopies réel sur les orientations de l'espace de Teichmüller réel $\mathcal{T}(\Sigma_g, c_\Sigma)$.

Théorème. — *Soit (Σ_g, c_Σ) une courbe réelle de genre au moins deux. L'action d'un élément φ de $\Gamma(\Sigma_g, c_\Sigma)$ sur les orientations de l'espace de Teichmüller réel associé à (Σ_g, c_Σ) est donnée par le signe du déterminant de l'application $\varphi_* : H_1(\Sigma_g, \mathbb{R})_{+1} \rightarrow H_1(\Sigma_g, \mathbb{R})_{+1}$.*

Dans le cas général, nous nous ramenons de nouveau au cas d'un fibré de rang 1 et nous considérons des diviseurs $D = \sum_i a_i x_i$, $a_i \in \mathbb{Z}$ et $x_i \in \Sigma_g$, invariants par c_Σ et tels que

- D est de degré $\deg(N)$ et
- pour chaque composante réelle $(\mathbb{R}\Sigma_g)_s$ de Σ_g , le diviseur $D|_{(\mathbb{R}\Sigma_g)_s} = \sum_{x_i \in (\mathbb{R}\Sigma_g)_s} a_i x_i$ est de la forme ax , où $x \in (\mathbb{R}\Sigma_g)_s$ et $a \in \{0, 1, 2\}$ et sa parité est donnée par $w_1(\mathbb{R}N)([\mathbb{R}\Sigma_g]_s)$.

Ces diviseurs seront dits compatibles avec (N, c_N) . Nous autorisons des points réels de multiplicité 2 afin que lorsque $\mathbb{R}N$ est orientable, on puisse toujours choisir un diviseur compatible divisible par deux. Ceci nous est utile pour étudier l'action des automorphismes d'un tel fibré N qui préservent une structure *Spin* réelle de N (voir Corollaire 4.4). Nous introduisons la notion de relevé d'un difféomorphisme associé à un diviseur compatible avec (N, c_N) . Deux tels relevés ont même action sur les orientations de $\text{Det}(N)$, et nous calculons le signe de celle-ci :

Théorème. — *Soit (N, c_N) un fibré en droites complexes sur (Σ_g, c_Σ) de partie réelle non vide. Soit D un diviseur compatible avec (N, c_N) et $\varphi \in \mathbb{R}\text{Diff}^+(\Sigma_g, w_1(\mathbb{R}N))$ tel que $\varphi_* D = D$. Le signe de l'action d'un relevé $\Phi_D \in \mathbb{R}\text{Aut}(N)$ de φ associé à D sur les orientations du fibré $\text{Det}(N)$ est donné par*

$$\varepsilon(\varphi|_D) \varepsilon(\sigma_\varphi^D) \det(\varphi^*),$$

où $\varphi|_D$ est la permutation des points du support de D comptés avec multiplicités induite par φ , σ_φ^D est la permutation induite par φ sur les orientations des composantes de $\mathbb{R}\Sigma_g$ qui contiennent des points de D , et φ^* est l'automorphisme de $H^1(\Sigma_g, \mathbb{R})_{-1}$ induit par φ .

Ce théorème répond à la première formulation de notre problème. Lorsque (Σ_g, c_Σ) est séparante ou lorsque (N, c_N) est de degré pair et de partie réelle orientable, nous parvenons à caractériser topologiquement ces relevés (voir les Corollaires 4.3 et 4.4), obtenant une réponse partielle à la seconde formulation de la question de départ.

Le dernier chapitre de ce mémoire est consacré à l'étude proprement dite de l'orientabilité des espaces de modules de courbes réelles dans des variétés réelles. Pour toute permutation τ de $\{1, \dots, m\}$ et d'ordre 2, nous notons $\mathbb{R}_\tau \mathcal{M}_{g,m}^d(X)$ la réunion des composantes connexes de $\mathbb{R} \mathcal{M}_{g,m}^d(X)$ qui contiennent les courbes réelles dont l'action de la structure réelle sur les points marqués est donnée par la permutation τ . Nous obtenons des résultats dans deux cas : lorsque les courbes considérées sont séparantes, et lorsque la partie réelle de la variété ambiante est orientable. Comme nous l'avons noté précédemment, le premier cas a déjà été

étudié par d'autres auteurs, nous retrouvons leurs résultats. Nous obtenons par exemple :

Théorème. — *Soit (X, ω, c_X) une variété symplectique réelle de dimension au moins 6. Supposons que la partie réelle de X admet une structure Spin . Soient $d \in H_2(X, \mathbb{Z})$ tel que $c_1(X)d \geq 0$, $m \geq 3$, et τ une permutation de $\{1, \dots, m\}$ d'ordre 2 admettant un point fixe. Alors pour tout $J \in \mathbb{R}J_\omega(X)$ générique, la variété $\mathbb{R}_\tau \mathcal{M}_{0,m}^d(X, J)$ est orientable.* \square

Le second cas est nouveau et nous permet d'obtenir le résultat suivant :

Théorème. — *Soit X_δ une hypersurface lisse de degré δ de $\mathbb{C}P^N$, $N \geq 4$, $N = 0$ ou $3 \pmod{4}$, de partie réelle non vide et vérifiant $\delta = N + 1 \pmod{4}$ et $\delta \leq N + 1$. Soit $d \in H_2(X_\delta, \mathbb{Z})$, $m \geq 1$ et τ une permutation de $\{1, \dots, m\}$ d'ordre 2 et ayant au moins un point fixe. Pour $J \in \mathbb{R}J_{\omega_{Fub}}^{\text{reg}}(X_\delta)$ on a*

$$w_1(\mathbb{R}_\tau \mathcal{M}_{g,m}^d(X_\delta, J)) = w_1(\mathbb{R}(T_{\underline{z}}\Sigma_g^m)) + (\delta - 1)w_1(\det(H^1(\Sigma_g, \mathbb{R})_{-1})),$$

où $\det(H^1(\Sigma_g, \mathbb{R})_{-1})$ et $\mathbb{R}(T_{\underline{z}}\Sigma_g^m)$ sont les fibrés sur $\mathbb{R}_\tau \mathcal{M}_{g,m}^d(X_\delta)$ de fibres respectives $\det(H^1(\Sigma_g, \mathbb{R})_{-1})$ et $\mathbb{R}(T_{\underline{z}}\Sigma_g^m)$ au-dessus de $[u, J_\Sigma, J, \underline{z}]$.

Notons que ce dernier Théorème recouvre par exemple le cas de $\mathbb{C}P^3$.

TABLE DES MATIÈRES

Introduction	vii
1. Le groupe des automorphismes d'un fibré réel	1
2. Étude des automorphismes réels de déterminant 1	7
2.1. Automorphismes réels et structures Pin^\pm sur $\mathbb{R}N$	7
2.2. Action des automorphismes réels de déterminant 1 sur les orientations du fibré déterminant	9
2.3. Lacets d'opérateurs de Cauchy-Riemann et structures Pin^\pm	11
3. Étude des automorphismes réels au-dessus de l'identité	15
3.1. Automorphismes réels et structures $Spin$ réelles	16
3.2. Action des automorphismes réels sur les orientations du fibré déterminant et structures $Spin$ réelles	26
3.3. Fibré déterminant sur le groupe de Picard	47
4. Étude des automorphismes réels	51
4.1. Action des automorphismes sur les structures Pin^\pm	53
4.2. Action du groupe des difféotopies réel sur l'espace de Teichmüller réel	57
4.3. Automorphismes associés à un diviseur	65
4.4. Action d'un automorphisme associé à un diviseur	68
5. Orientabilité des espaces de modules de courbes réelles	77
5.1. Espaces de modules et fibré déterminant	77
5.2. Orientabilité du fibré déterminant	79
5.3. Suites exactes courtes de fibrés vectoriels complexes	83
5.4. Démonstration des Théorèmes 5.1 et 5.2	94
Bibliographie	97

CHAPITRE 1

LE GROUPE DES AUTOMORPHISMES D'UN FIBRÉ RÉEL

Soit Σ_g une surface compacte connexe sans bord orientée de genre g . On dit que le couple (Σ_g, c_Σ) est une courbe réelle si $c_\Sigma : \Sigma_g \rightarrow \Sigma_g$ est une involution renversant l'orientation. Les points fixes d'une telle involution forment une sous-variété de dimension 1 de Σ_g , non nécessairement connexe ou non vide, notée $\mathbb{R}\Sigma_g$ (voir [22]). La lettre k désignera toujours le nombre de composantes connexes $(\mathbb{R}\Sigma_g)_1, \dots, (\mathbb{R}\Sigma_g)_k$ de $\mathbb{R}\Sigma_g$, et nous supposons à partir de maintenant que k est non nul.

Considérons un couple (N, c_N) formé d'un fibré vectoriel complexe $\pi_N : N \rightarrow \Sigma_g$ et d'une involution $c_N : N \rightarrow N$ \mathbb{C} -anti-linéaire dans les fibres et relevant c_Σ . On dira que le fibré N est muni d'une structure réelle, et on notera $\mathbb{R}N$ le fibré vectoriel réel sur $\mathbb{R}\Sigma_g$ formé des points fixes de c_N . Nous noterons généralement $(\mathbb{R}N)_i$ la restriction du fibré $\mathbb{R}N$ au-dessus de $(\mathbb{R}\Sigma_g)_i$.

Nous appellerons morphisme entre deux fibrés vectoriels complexes munis de structures réelles $\pi_N : (N, c_N) \rightarrow (\Sigma_g, c_\Sigma)$ et $\pi_{N'} : (N', c_{N'}) \rightarrow (\Sigma'_g, c_{\Sigma'})$ une paire (Φ, ϕ) composée

- d'un difféomorphisme $\phi : (\Sigma_g, c_\Sigma) \rightarrow (\Sigma'_g, c_{\Sigma'})$ $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ -équivariant et préservant les orientations
- d'une application $\Phi : (N, c_N) \rightarrow (N', c_{N'})$ $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ -équivariante, \mathbb{C} -linéaire dans les fibres et faisant commuter le diagramme

$$\begin{array}{ccc} (N, c_N) & \xrightarrow{\Phi} & (N', c_{N'}) \\ \pi_N \downarrow & & \downarrow \pi_{N'} \\ (\Sigma_g, c_\Sigma) & \xrightarrow[\phi]{} & (\Sigma'_g, c_{\Sigma'}). \end{array}$$

Nous dirons que Φ est un morphisme au-dessus de ϕ , ou encore que Φ relève ϕ .

Nous rappelons tout d'abord un résultat de classification de ces fibrés à isomorphisme près qui nous sera utile par la suite (voir par exemple les Propositions 4.1 et 4.2 de [5]).

Lemme 1.1. — *Deux fibrés vectoriels complexes munis de structures réelles (N, c_N) et $(N', c_{N'})$ sont isomorphes au-dessus de l'identité sur (Σ_g, c_Σ) si et seulement si ils ont même rang, même degré et si leurs parties réelles ont même première classe de Stiefel-Whitney.* \square

Nous noterons $\mathbb{R}Aut(N)$ le groupe des automorphismes réels de (N, c_N) . Remarquons que le difféomorphisme sous-jacent d'un élément de $\mathbb{R}Aut(N)$ doit préserver la première classe de Stiefel-Whitney du fibré $\mathbb{R}N$, $w_1(\mathbb{R}N) \in H^1(\mathbb{R}\Sigma_g, \mathbb{Z}/2\mathbb{Z})$. Nous noterons $\mathbb{R}Diff^+(\Sigma_g, w_1(\mathbb{R}N))$ le groupe formé de ces difféomorphismes. Enfin, le noyau de la projection $\mathbb{R}Aut(N) \rightarrow \mathbb{R}Diff^+(\Sigma_g, w_1(\mathbb{R}N))$ sera noté $\mathbb{R}GL(N)$.

Nous noterons d'autre part $\mathbb{R}J(\Sigma_g)$ l'ensemble des structures complexes sur (Σ_g, c_Σ) qui rendent c_Σ anti-holomorphe. Cet espace est non vide et contractile (voir [22], [28] et [30]).

Lorsqu'une telle structure complexe $J \in \mathbb{R}J(\Sigma_g)$ est fixée, nous noterons

$$\bar{\partial}_J = \frac{1}{2}(d + i \circ d \circ J)$$

qui est la partie \mathbb{C} -antilinéaire de la différentielle extérieure d . Rappelons aussi la définition suivante.

Définition 1.1. — *Un opérateur de Cauchy-Riemann sur un fibré vectoriel complexe N sur une surface de Riemann Σ_g munie d'une structure complexe J est un opérateur \mathbb{C} -linéaire*

$$\bar{\partial} : \Gamma(\Sigma_g, N) \rightarrow \Gamma(\Sigma_g, \Lambda^{0,1}\Sigma_g \otimes N)$$

vérifiant la règle de Leibniz :

$$\forall f \in \mathcal{C}^\infty(\Sigma_g, \mathbb{C}), \forall v \in \Gamma(\Sigma_g, N), \bar{\partial}(fv) = \bar{\partial}_J(f) \otimes v + f\bar{\partial}(v).$$

Pour tout fibré vectoriel complexe (N, c_N) sur (Σ_g, c_Σ) muni d'une structure réelle nous noterons $\mathbb{R}\mathcal{C}_J(N)$ l'espace des opérateurs de Cauchy-Riemann sur N équivariants sous l'action de la structure réelle c_N . Cet ensemble forme un espace affine de dimension infinie (voir [21]). Nous noterons d'autre part $\mathbb{R}\mathcal{C}(N)$ l'ensemble des paires $(\bar{\partial}, J)$ où $\bar{\partial}$ est un élément de $\mathbb{R}\mathcal{C}_J(N)$.

Comme les opérateurs que nous considérons sont $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ -équivariants, la structure réelle c_N induit une involution linéaire sur leurs noyaux et conoyaux. Nous noterons avec un indice $+1$ (resp. -1) les sous-espaces propres associés à la valeur propre $+1$ (resp. -1) de cette involution.

Notons que les dimensions des noyaux et conoyaux d'un opérateur de Cauchy-Riemann réel ne sont pas constantes sur tout $\mathbb{R}\mathcal{C}(N)$. L'union de tous les noyaux ou de tous les conoyaux au-dessus de $\mathbb{R}\mathcal{C}(N)$ ne forme donc pas un fibré vectoriel. Toutefois, on peut définir un fibré en droites réelles noté $\text{Det}(N)$ sur $\mathbb{R}\mathcal{C}(N)$ dont la fibre au-dessus de l'opérateur $\bar{\partial}$ est son déterminant $\text{Det}(\bar{\partial}) = \Lambda_{\mathbb{R}}^{\max} H_{\bar{\partial}}^0(\Sigma_g, N)_{+1} \otimes (\Lambda_{\mathbb{R}}^{\max} H_{\bar{\partial}}^1(\Sigma_g, N)_{+1})^*$ (voir [21]). Comme $\mathbb{R}\mathcal{C}(N)$ est contractile, ce fibré est orientable, mais non canoniquement orienté.

Afin d'évaluer ce défaut d'orientation canonique, nous étudions dans les §2, 3 et 4 de la présente thèse l'action des automorphismes réels de (N, c_N) sur le fibré $\text{Det}(N)$.

Cette action est définie de la façon suivante. Tout d'abord, les automorphismes réels de (N, c_N) agissent sur les espaces de sections de N et de $(0, 1)$ -formes à

valeurs dans N d'une part et d'autre part sur les structures complexes de (Σ_g, c_Σ) respectivement par

$$\begin{aligned} (\Phi, \phi)_* s &= \Phi(s) \circ \phi^{-1} \\ (\Phi, \phi)^* \alpha &= \Phi^{-1} \circ \alpha \circ d\phi \text{ et} \\ (\Phi, \phi)^* J &= d\phi^{-1} \circ J \circ d\phi \end{aligned}$$

où s est une section de N , α est une $(0, 1)$ -forme à valeurs dans N et J une structure complexe sur la surface (voir [30]). De plus, cette action est $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ -équivariante. Ceci induit une action sur l'espace $\mathbb{RC}(N)$

$$(\Phi, \phi)^*(\bar{\partial}, J) = \left((\Phi, \phi)^* \left(\bar{\partial}((\Phi, \phi).) \right), (\Phi, \phi)^* J \right)$$

et donc sur le fibré $\text{Det}(N)$.

Rien ne garantit qu'en agissant sur ce fibré les automorphismes réels de (N, c_N) préservent ses orientations. Nous allons donc étudier plus précisément l'action des automorphismes réels du fibré (N, c_N) sur les orientations du fibré $\text{Det}(N)$.

Remarquons tout d'abord que cette action ne dépend que de la classe d'homotopie de l'automorphisme réel de (N, c_N) . Ainsi, nous commençons par décrire la structure des automorphismes réels d'un fibré vectoriel complexe muni d'une structure réelle (N, c_N) sur (Σ_g, c_Σ) pris à homotopie près.

Introduisons pour cela le sous-groupe

$$\mathbb{RSL}(N) := \{ \Phi \in \mathbb{RGL}(N) \mid \forall x \in \Sigma_g, \det(\Phi_x) = 1 \}$$

des éléments de $\mathbb{RGL}(N)$ de déterminant 1.

Lemme 1.2. — *Les suites suivantes sont exactes :*

$$(1) \quad 0 \rightarrow \mathbb{RGL}(N) \longrightarrow \mathbb{RAut}(N) \xrightarrow{\pi_N} \mathbb{RDiff}^+(\Sigma_g, w_1(\mathbb{RN})) \rightarrow 0$$

$$(2) \quad 0 \rightarrow \mathbb{RSL}(N) \longrightarrow \mathbb{RGL}(N) \xrightarrow{\det} \mathbb{RC}^\infty(\Sigma_g, \mathbb{C}^*) \rightarrow 0$$

$$(3) \quad 0 \rightarrow \ker(\text{rest}) \longrightarrow \mathbb{RSL}(N) \xrightarrow{\text{rest}} \pi_0(\mathbb{RSL}(\mathbb{RN})) \rightarrow 0$$

où :

$$\begin{aligned} \text{rest} : \mathbb{RSL}(N) &\rightarrow \pi_0(\mathbb{RSL}(\mathbb{RN})) \\ \Phi &\rightarrow [\Phi|_{\mathbb{RN}}]. \end{aligned}$$

De plus, $\ker(\text{rest})$ est connexe.

Notons avant de passer à la démonstration que l'application \det est définie comme la composée de

$$\begin{aligned} \mathbb{RGL}(N) &\rightarrow \mathbb{RGL}(\det(N)) \\ \Phi &\mapsto \det(\Phi) \end{aligned}$$

et de l'isomorphisme canonique $\mathbb{RGL}(\det(N)) = \mathbb{RC}^\infty(\Sigma_g, \mathbb{C}^*)$.

Démonstration. — (1) Vérifions la surjectivité de π_N . D'après le Lemme 1.1 nous avons un isomorphisme

$$(*) \quad (N, c_N) \cong (\det(N), c_{\det(N)}) \oplus (\mathbb{C}^{\text{rg}(N)-1}, \text{conj})$$

où $(\mathbb{C}^{\text{rg}(N)-1}, \text{conj})$ est le fibré trivial de rang $\text{rg}(N) - 1$ sur (Σ_g, c_Σ) , et $\det(N) = \Lambda^{\max} N$. Il nous suffit donc, si ϕ est un élément de $\mathbb{RDiff}^+(\Sigma_g, w_1(\mathbb{RN}))$,

de trouver des relevés de ϕ en des automorphismes réels de chacun des $\text{rg}(N)$ sous-fibrés en droites fournis par l'isomorphisme $(*)$.

Or, de tels automorphismes sont donnés par des sections des fibrés $\phi^*(\det(N), c_{\det(N)}) \otimes (\det(N), c_{\det(N)})^*$ et $\phi^*(\mathbb{C}, \text{conj}) \otimes (\mathbb{C}, \text{conj})^*$ ne s'annulant jamais. Comme ϕ préserve les premières classes de Stiefel-Whitney des fibrés $\mathbb{R}\det(N)$ et $\mathbb{R}\mathbb{C}$, le Lemme 1.1 nous dit que les deux fibrés précédents sont isomorphes au fibré trivial $(\mathbb{C}, \text{conj})$. Ils admettent donc des sections qui ne s'annulent jamais.

- (2) Si f est un élément de $\mathbb{R}\mathcal{C}^\infty(\Sigma_g, \mathbb{C}^*)$, on obtient, grâce à l'isomorphisme $(*)$, un automorphisme de (N, c_N) $\Phi_f = f \oplus \text{id}_{\mathbb{C}^{\text{rg}(N)-1}}$ vérifiant $\det(\Phi_f) = f$.
- (3) Étudions tout d'abord la surjectivité de rest . Fixons pour cela une classe $[\Psi]$ dans $\pi_0(SL(\mathbb{R}N))$. Choisissons aussi deux ouverts emboîtés $\mathbb{R}V_i \subset \overline{\mathbb{R}V_i} \subset \mathbb{R}U_i$ homéomorphes à des intervalles sur chaque composante $(\mathbb{R}\Sigma_g)_i$, et k paires d'ouverts emboîtés disjointes $V_1 \subset \overline{V_1} \subset U_1, \dots, V_k \subset \overline{V_k} \subset U_k$ de Σ_g invariants sous l'action de c_Σ et homéomorphes à des disques, tels que $U_i \cap \mathbb{R}\Sigma_g = \mathbb{R}U_i$ et $V_i \cap \mathbb{R}\Sigma_g = \mathbb{R}V_i$. Prenons un représentant Ψ de la classe $[\Psi]$ tel que Ψ soit l'identité en dehors des $\mathbb{R}V_i$. En trivialisant (N, c_N) au dessus des U_i , $\Psi|_{\overline{\mathbb{R}V_i}}$ nous fournit k chemins dans $SL_{\text{rg}(N)}(\mathbb{R})$ dont les extrémités se recollent en l'identité. Ces lacets peuvent être homotopés dans $SL_{\text{rg}(N)}(\mathbb{C})$ (qui est simplement connexe) sur le lacet constant égal à l'identité. Ainsi, pour chaque i on peut prolonger Ψ sur une composante de $U_i - \mathbb{R}U_i$ puis sur tout U_i grâce à la structure réelle de (N, c_N) de sorte que ce prolongement soit l'identité sur $U_i - V_i$. On obtient un automorphisme réel de (N, c_N) relevant la classe $[\Psi]$ en prolongeant en dehors des U_i par l'identité.

Considérons enfin la connexité du noyau de rest . Fixons une triangulation T de (Σ_g, c_Σ) invariante sous l'action de c_Σ . Prenons Φ un élément de $\ker(\text{rest})$. On peut supposer que la restriction de Φ à $\mathbb{R}\Sigma_g$ est l'identité. On homotope Φ sur id progressivement :

1. tout d'abord au-dessus des sommets de T ,
2. puis au-dessus des arêtes de T , ce que l'on peut faire puisque $\pi_1(SL_{\text{rg}(N)}(\mathbb{C}))$ est trivial,
3. et enfin au-dessus des faces de T , ce qui est possible car $\pi_2(SL_{\text{rg}(N)}(\mathbb{C}))$ est trivial.

□

Remarque 1.1. —

- Si $\text{rg}(N) \geq 3$, $\pi_0(SL(\mathbb{R}N)) \cong (\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^k$, où $k = b_0(\mathbb{R}\Sigma_g)$.
- Le cas $\text{rg}(N) = 2$ est particulier. Le Lemme 1.3 en donne une description.
- Lorsque $\text{rg}(N) = 1$, l'application $\det : \mathbb{R}GL(N) \rightarrow \mathbb{R}\mathcal{C}^\infty(\Sigma_g, \mathbb{C}^*)$ dans la suite exacte (2) est en fait un isomorphisme, et le groupe $\mathbb{R}SL(N)$ est trivial.

Lemme 1.3. — *Soit (N, c_N) un fibré vectoriel complexe de rang 2 muni d'une structure réelle sur (Σ_g, c_Σ) . Alors, le groupe $\pi_0(SL(\mathbb{R}N))$ est isomorphe à*

$\mathbb{Z}^{k_+} \times (\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^{k_-}$, où

$$k_+ = \text{card} \{1 \leq i \leq k \mid w_1(\mathbb{R}N)([\mathbb{R}\Sigma_g]_i) = 0\}$$

$$\text{et } k_- = \text{card} \{1 \leq i \leq k \mid w_1(\mathbb{R}N)([\mathbb{R}\Sigma_g]_i) \neq 0\}.$$

De plus, avec les notations du Lemme 1.2 et sous cet isomorphisme, l'image de $\text{rest}(-\text{id}) \in \pi_0(SL(\mathbb{R}N)) \cong \mathbb{Z}^{k_+} \times (\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^{k_-}$ par l'application de réduction modulo 2 $\mathbb{Z}^{k_+} \times (\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^{k_-} \rightarrow (\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^k$ est égale à $(w_1(\mathbb{R}N)([\mathbb{R}\Sigma_g]_1), \dots, w_1(\mathbb{R}N)([\mathbb{R}\Sigma_g]_k))$.

Démonstration. — Fixons $1 \leq i \leq k$. Nous distinguons deux cas, suivant que $(\mathbb{R}N)_i \rightarrow (\mathbb{R}\Sigma_g)_i$ est orientable ou non.

Si $w_1(\mathbb{R}N)([\mathbb{R}\Sigma_g]_i) = 0$: Nous pouvons dans ce cas trivialisier le fibré $(\mathbb{R}N)_i$.

Dans cette trivialisiation, un automorphisme du fibré à homotopie près est donné par une classe dans le groupe fondamental de $SL_2(\mathbb{R})$. Or, ce groupe fondamental est isomorphe à \mathbb{Z} . Dans le cas particulier de $-\text{id}$, nous obtenons le lacet constant égal à $\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$, qui est homotope au lacet constant égal à l'identité.

Si $w_1(\mathbb{R}N)([\mathbb{R}\Sigma_g]_i) = 1$: Le raisonnement employé ici s'inspire de [27]. Le fibré $(\mathbb{R}N)_i$ est isomorphe au fibré $[0, 1] \times \mathbb{R}^2 / (0, v) \sim (1, r(v))$ où $r(x_1, x_2) = (x_1, -x_2)$. Sous cet isomorphisme, un élément de $SL((\mathbb{R}N)_i)$ correspond à une application $f : [0, 1] \rightarrow SL_2(\mathbb{R})$ vérifiant $f(0) = r f(1) r$. Cette dernière condition se réécrit grâce à la décomposition polaire, produit d'une rotation par une matrice triangulaire supérieure à coefficients diagonaux strictement positifs,

$$f(t) = r_{\theta(t)} \begin{pmatrix} \lambda(t) & a(t) \\ 0 & \frac{1}{\lambda(t)} \end{pmatrix}$$

en $\theta(0) = -\theta(1) \pmod{2\pi}$ et $a(0) = -a(1)$. D'autre part, cette décomposition fournit aussi une rétraction de $SL_2(\mathbb{R})$ sur $SO_2(\mathbb{R})$

$$h : [0, 1] \times SL_2(\mathbb{R}) \rightarrow SL_2(\mathbb{R})$$

$$\left(s, r \begin{pmatrix} \lambda & a \\ 0 & \frac{1}{\lambda} \end{pmatrix} \right) \mapsto r \begin{pmatrix} (1-s)\lambda + s & (1-s)a \\ 0 & \frac{1}{(1-s)\lambda + s} \end{pmatrix}$$

qui préserve les conditions précédentes. En appliquant cette rétraction, nous obtenons une homotopie $h(s, f)$ joignant f à r_θ . Ainsi, une classe d'homotopie d'éléments de $SL((\mathbb{R}N)_i)$ correspond à une classe d'homotopie d'applications $\theta : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}$ avec $\theta(0) = -\theta(1) \pmod{2\pi}$, c'est-à-dire à une classe d'homotopie de sections d'une bouteille de Klein (vue comme fibré en cercles au-dessus du cercle). Or, il n'y a que deux telles classes qui sont définies par les lacets $\theta(t) = 0$ et $\theta(t) = \pi$. Le premier correspond à id , le second à $-\text{id}$. \square

Notation 1. — On note rest_2 la composée de rest avec la réduction modulo 2

$$\pi_0(SL(\mathbb{R}N)) \rightarrow \pi_0(SL(\mathbb{R}N))/2\pi_0(SL(\mathbb{R}N)) \cong (\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^k,$$

et on notera avec un indice i entre 1 et k les composantes de rest_2 .

CHAPITRE 2

ÉTUDE DES AUTOMORPHISMES RÉELS DE DÉTERMINANT 1

Nous nous intéressons dans cette section à l'action du groupe $\mathbb{R}SL(N)$ des automorphismes réels de déterminant 1 d'un fibré (N, c_N) sur le fibré $\text{Det}(N)$.

Comme nous l'avons noté dans la Remarque 1.1, lorsque le rang de N est égal à 1 le groupe $\mathbb{R}SL(N)$ est trivial et agit donc trivialement sur le fibré $\text{Det}(N)$. Nous supposons dans cette section que N est de rang au moins deux.

D'après le Lemme 1.2, cette action se factorise à travers le morphisme rest_2 et nous commençons par réinterpréter ce morphisme en termes d'action des automorphismes sur les structures Pin^\pm de $\mathbb{R}N$. Nous étudions ensuite l'action des automorphismes de déterminant 1 sur le fibré $\text{Det}(N)$. Nous démontrons en particulier le résultat suivant.

Théorème 2.1. — *Soit $t \in \mathbb{R}SL(N)$. Alors t préserve les orientations du fibré $\text{Det}(N)$ si et seulement si le nombre de composantes de $\mathbb{R}N$ dont les structures Pin^\pm sont échangées sous l'action de t est pair.*

Ce résultat fournit donc une interprétation topologique de l'action de $\mathbb{R}SL(N)$ sur les orientations du fibré $\text{Det}(N)$. En guise d'application, nous donnons une condition nécessaire et suffisante pour que le fibré déterminant au-dessus d'un lacet d'opérateurs de Cauchy-Riemann soit orientable.

2.1. Automorphismes réels et structures Pin^\pm sur $\mathbb{R}N$

Commençons par quelques rappels au sujet des structures Pin^\pm . Prenons un entier $n \geq 2$. Le groupe $GL_n(\mathbb{R})$ a un revêtement double (topologique) non trivial au-dessus de chaque composante connexe qui admet deux structures de groupe distinctes relevant celle de $GL_n(\mathbb{R})$. Ces deux groupes sont notés $\widetilde{GL}_n^+(\mathbb{R})$ et $\widetilde{GL}_n^-(\mathbb{R})$. Fixons maintenant un fibré vectoriel réel V de rang n au-dessus d'une base B et notons R_V le fibré principal des repères associé. Ce fibré a pour groupe structural $GL_n(\mathbb{R})$. Une structure \widetilde{GL}_n^\pm sur V est la donnée d'une classe d'isomorphisme de paires composées d'un fibré principal $P_{\widetilde{GL}^\pm}$ sur B de groupe structural $\widetilde{GL}_n^\pm(\mathbb{R})$ et d'un morphisme de fibrés $P_{\widetilde{GL}^\pm} \rightarrow R_V$, revêtement double équivariant pour les actions de $GL_n(\mathbb{R})$ et $\widetilde{GL}_n^\pm(\mathbb{R})$.

Remarque 2.1. — La définition que nous donnons ici ne diffère que peu de la définition usuelle des structures Pin^\pm utilisant les groupes $O_n(\mathbb{R})$ et $Pin_n^\pm(\mathbb{R})$ (voir par exemple [17]) au lieu de $GL_n(\mathbb{R})$ et $\widetilde{GL}_n^\pm(\mathbb{R})$, car $GL_n(\mathbb{R})$ se rétracte sur $O_n(\mathbb{R})$. Nous avons une correspondance naturelle entre les structures Pin^\pm et \widetilde{GL}_n^\pm . Ceci nous permet donc de parler de structures Pin^\pm sans se soucier de fixer de métrique sur les fibrés considérés.

Pour terminer, notons que l'obstruction à l'existence d'une structure Pin^+ (resp. Pin^-) sur le fibré V est donnée par la classe caractéristique $w_2(V)$ (resp. $w_2(V) + w_1^2(V)$) (voir [17]).

Les fibrés $(\mathbb{R}N)_i$ ayant pour bases des cercles, nous avons $w_2((\mathbb{R}N)_i) = 0$ et $w_1^2((\mathbb{R}N)_i) = 0$. Ils admettent donc un ensemble de structures Pin^\pm que nous noterons $Pin^\pm((\mathbb{R}N)_i)$. Ces ensembles sont des espaces affines sur $H^1((\mathbb{R}\Sigma_g)_i, \mathbb{Z}/2\mathbb{Z})$ (voir [17]).

D'autre part, les éléments de $\mathbb{R}SL(N)$ agissent sur ces structures par tiré-en-arrière : pour $\Phi \in \mathbb{R}SL(N)$, P et P' deux structures Pin^\pm sur $(\mathbb{R}N)_i$, nous avons $\Phi^*(P') = P$ s'il existe un morphisme $\tilde{\Phi} : P \rightarrow P'$ tel que le diagramme suivant commute

$$\begin{array}{ccc} P & \xrightarrow{\tilde{\Phi}} & P' \\ \downarrow & & \downarrow \\ R_{(\mathbb{R}N)_i} & \xrightarrow{\Phi|_{(\mathbb{R}N)_i}} & R_{(\mathbb{R}N)_i}. \end{array}$$

Cette action est en fait une action par translation sur $Pin^\pm((\mathbb{R}N)_i)$ et fournit un morphisme

$$\tau : \mathbb{R}SL(N) \rightarrow H^1(\mathbb{R}\Sigma_g, \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}) = (\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^k.$$

Nous rappelons enfin le lemme suivant (voir [27], Lemme 2.6) qui relie l'action des automorphismes réels de N sur les structures Pin^\pm de $\mathbb{R}N$ et les classes d'homotopie de leurs restrictions à $\mathbb{R}N$.

Lemme 2.1. — *Les applications rest_2 et τ sont égales.* □

Plus généralement, si M est un fibré vectoriel réel de rang au moins 2 sur un cercle, alors

- lorsque M n'est pas orientable, il y a exactement deux classes d'homotopie d'automorphismes de déterminant 1 de M ; l'une (celle de l'identité) préserve les structures Pin^\pm de M , l'autre les échange.
- lorsque M est orientable et de rang au moins 3, il y a exactement deux classes d'homotopie d'automorphismes de déterminant 1 de M ; l'une préserve les structures Pin^\pm de M , l'autre les échange.
- lorsque M est orientable et de rang 2, les classes d'homotopie d'automorphismes de déterminant 1 de M sont toutes multiples de celle provenant d'un générateur de $\pi_1(SO_2(\mathbb{R}))$; les multiples pairs préservent les structures Pin^\pm de M , les multiples impairs les échangent.

2.2. Action des automorphismes réels de déterminant 1 sur les orientations du fibré déterminant

Prenons tout d'abord une structure complexe $J \in \mathbb{R}J(\Sigma_g)$ qui sera fixée pendant tout ce paragraphe.

Nous allons établir le Lemme 2.2 avant de démontrer le Théorème 2.1. Si (L, c_L) est un fibré en droites holomorphe muni d'une structure réelle sur (Σ_g, c_Σ) , nous noterons $\mathcal{M}(L)_{+1}$ l'espace des sections méromorphes de L qui sont $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ -équivariantes. Pour une telle section $\sigma \in \mathcal{M}(L)_{+1}$, nous noterons respectivement $\text{div}_0(\sigma)$ et $\text{div}_\infty(\sigma)$ les diviseurs de zéros et de pôles de σ .

Si (M, c_M) est un autre fibré en droites holomorphe sur (Σ_g, c_Σ) , alors une section $\sigma \in \mathcal{M}(M \otimes L^*)_{+1}$ définit un nouveau fibré en droites holomorphe $(F_\sigma = \text{graphe}(\sigma), c_F)$ de la façon suivante. Si on note $U_{0,\sigma} = \Sigma_g - \text{div}_\infty(\sigma)$ et $U_{\infty,\sigma} = \Sigma_g - \text{div}_0(\sigma)$, alors

$$F|_{U_0} = \{(v, \sigma(v)), v \in L\} \subset L \oplus M, \quad F|_{U_\infty} = \{(\sigma^*(w), w), w \in M\} \subset L \oplus M.$$

Ici σ^* est l'élément de $\mathcal{M}(L \otimes M^*)_{+1}$ vérifiant $\sigma^* \sigma = 1$. D'autre part, $F_\sigma \subset L \oplus M$ est naturellement muni de sa structure réelle c_F venant de celle de $L \oplus M$. On remarque de plus que

$$\begin{aligned} F_x &= L_x, \text{ quand } x \in \text{div}_0(\sigma) \\ F_x &= M_x, \text{ quand } x \in \text{div}_\infty(\sigma). \end{aligned}$$

Pour tout supplémentaire complexe (non nécessairement holomorphe) $(G, c_G) \subset (L \oplus M, c_{L \oplus M})$ de F_σ , on note respectivement r_{F_σ}, r_L, r_M les réflexions par rapport à G, M, L et d'axes F_σ, L, M , et $t_{L,\sigma} = r_{F_\sigma} \circ r_L$, $t_{M,\sigma} = r_{F_\sigma} \circ r_M$. Les classes d'homotopie de $t_{L,\sigma}$ et $t_{M,\sigma}$ ne dépendent pas du choix de (G, c_G) .

Le lemme suivant étudie un cas particulier de l'action qui nous intéresse.

Lemme 2.2. — *Soient (L, c_L) et (M, c_M) deux fibrés en droites holomorphes munis de structures réelles sur (Σ_g, c_Σ) . Fixons $\sigma \in \mathcal{M}(M \otimes L^*)_{+1}$, et $(F_\sigma = \text{graphe}(\sigma), c_F) \subset (L \oplus M, c_{L \oplus M})$. Choisissons un supplémentaire complexe (G, c_G) de F_σ . On a alors :*

- (i) $t_{L,\sigma}$ (resp. $t_{M,\sigma}$) préserve les orientations du fibré $\text{Det}(L \oplus M)$ si et seulement si $\deg(L) - \deg(F_\sigma)$ (resp. $\deg(M) - \deg(F_\sigma)$) est pair.
- (ii) $\deg(L) = \deg(F_\sigma) + \text{card}(\text{div}_\infty(\sigma))$ et $\deg(M) = \deg(F_\sigma) + \text{card}(\text{div}_0(\sigma))$.
- (iii) $(\text{rest}_2)_i(t_{L,\sigma}) = \text{card}(\text{div}_\infty(\sigma|_{\mathbb{R}\Sigma_i})) \pmod{2}$ et $(\text{rest}_2)_i(t_{M,\sigma}) = \text{card}(\text{div}_0(\sigma|_{\mathbb{R}\Sigma_i})) \pmod{2}$.

Remarquons avant de le démontrer que ce lemme implique le Théorème 2.1 pour les automorphismes $t_{F,\sigma}$ et $t_{M,\sigma}$. Ces trois points nous assurent en effet que les automorphismes $t_{L,\sigma}$ et $t_{M,\sigma}$ préservent les orientations du fibré $\text{Det}(L \oplus M)$ si et seulement si $\sum_{i=1}^k (\text{rest}_2)_i(t_{L,\sigma})$ et $\sum_{i=1}^k (\text{rest}_2)_i(t_{M,\sigma})$ sont pairs. En appliquant le Lemme 2.1 nous obtenons le Théorème 2.1 dans ce cas.

Démonstration. — (i) Nous démontrons ce premier point seulement pour $t_{L,\sigma}$, le résultat pour $t_{M,\sigma}$ se traitant de façon tout à fait analogue. Notons $\bar{\partial}_L$ (resp. $\bar{\partial}_{L\oplus M}$) l'opérateur de Cauchy-Riemann sur L (resp. sur $L\oplus M$) associé à la structure holomorphe du fibré (voir [18]). L'automorphisme $-1 : L \rightarrow L$ fixe l'opérateur $\bar{\partial}_L$ et agit sur la droite $\text{Det}(\bar{\partial}_L)$ par multiplication par $(-1)^{\dim(\ker(\bar{\partial}_L)) + \dim(\text{coker}(\bar{\partial}_L))}$. Ainsi, l'automorphisme $r_L : L \oplus M \rightarrow L \oplus M$ fixe l'opérateur $\bar{\partial}_{L\oplus M}$ et agit sur la droite $\text{Det}(\bar{\partial}_{L\oplus M}) = \text{Det}(\bar{\partial}_L) \otimes \text{Det}(\bar{\partial}_M)$ par multiplication par $(-1)^{\dim(\ker(\bar{\partial}_L)) + \dim(\text{coker}(\bar{\partial}_L))}$. Donc r_L préserve les orientations de la droite $\text{Det}(\bar{\partial}_{L\oplus M})$ (et donc du fibré $\text{Det}(L\oplus M)$) si et seulement si $\dim(\ker(\bar{\partial}_L)) + \dim(\text{coker}(\bar{\partial}_L))$ est pair. Or, le Théorème de Riemann-Roch affirme que $\dim(\ker(\bar{\partial}_L)) - \dim(\text{coker}(\bar{\partial}_L)) = \deg(L) + 1 - g$.

Fixons ensuite un opérateur de Cauchy-Riemann réel $\bar{\partial}_G$ sur G et appliquons le même raisonnement que précédemment aux fibrés F_σ et G . Nous voyons alors que l'automorphisme r_{F_σ} préserve les orientations de la droite $\text{Det}(\bar{\partial}_{F_\sigma}) \otimes \text{Det}(\bar{\partial}_G)$ (et donc du fibré $\text{Det}(F_\sigma \oplus G) = \text{Det}(L \oplus M)$) si et seulement si $\deg(F_\sigma) + 1 - g$ est pair.

Ainsi, l'automorphisme $t_{L,\sigma} = r_{F_\sigma} \circ r_L$ préserve les orientations du fibré $\text{Det}(L \oplus M)$ si et seulement si $\deg(L) + \deg(F_\sigma) + 2 - 2g$ est pair. D'où le premier point.

- (ii) Soit une section $\sigma_L \in \mathcal{M}(L)_{+1}$ telle que ses pôles et zéros soient disjoints de ceux de σ . Posons $\sigma_F = (\sigma_L, \sigma(\sigma_L)) \in \mathcal{M}(F)_{+1}$, et notons $pr_M : L \oplus M \rightarrow M$ la projection naturelle. Alors

$$\begin{aligned} \text{div}_0(\sigma_L) &= \text{div}_0(\sigma_F) \\ \text{div}_\infty(\sigma_L) &= \text{div}_\infty(\sigma_F) - \text{div}_\infty(\sigma) \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} \text{div}_0(pr_M(\sigma_F)) &= \text{div}_0(\sigma_F) + \text{div}_0(\sigma) \\ \text{div}_\infty(pr_M(\sigma_F)) &= \text{div}_\infty(\sigma_F). \end{aligned}$$

D'où en soustrayant ces égalités, $\deg(L) = \deg(F_\sigma) + \text{card}(\text{div}_\infty(\sigma))$ et $\deg(M) = \deg(F_\sigma) + \text{card}(\text{div}_0(\sigma))$.

- (iii) Nous distinguons deux cas, suivant que $(\mathbb{R}L \oplus \mathbb{R}M)_i$ est orientable ou non.

Si $(\mathbb{R}L \oplus \mathbb{R}M)_i$ est orientable, on le trivialise. Les automorphismes $t_{L,\sigma}$ et $t_{M,\sigma}$ induisent alors deux lacets dans $SL_2(\mathbb{R})$. On calcule $(\text{rest}_2)_i(t_{L,\sigma})$ et $(\text{rest}_2)_i(t_{M,\sigma})$ en comptant la parité des classes d'homotopie des lacets précédents dans $\pi_1(SL_2(\mathbb{R})) \cong \mathbb{Z}$. Or ces parités se mesurent en comptant le nombre de demi-tours que fait $(\mathbb{R}F)_i$ respectivement par rapport à $(\mathbb{R}L)_i$ et $(\mathbb{R}M)_i$. En effet, en prenant une trivialisation telle que $(\mathbb{R}L)_i$ et $(\mathbb{R}M)_i$ soient orthogonaux, et en homotopant $(\mathbb{R}G)_i$ sur l'orthogonal de $(\mathbb{R}F_\sigma)_i$ ces deux lacets dans $SL_2(\mathbb{R})$ sont en fait homotopes à des lacets de rotations d'angles égaux respectivement au double de l'angle entre $(\mathbb{R}L)_i$ et $(\mathbb{R}F_\sigma)_i$ et au double de l'angle entre $(\mathbb{R}M)_i$ et $(\mathbb{R}F_\sigma)_i$.

Nous avons donc $(\text{rest}_2)_i(t_{L,\sigma}) = \text{card}(\text{div}_0(\sigma|_{\mathbb{R}\Sigma_i})) \bmod 2$ et $(\text{rest}_2)_i(t_{M,\sigma}) = \text{card}(\text{div}_\infty(\sigma|_{\mathbb{R}\Sigma_i})) \bmod 2$. On conclut en remarquant que dans ce cas $\text{card}(\text{div}_\infty(\sigma|_{\mathbb{R}\Sigma_i})) = \text{card}(\text{div}_0(\sigma|_{\mathbb{R}\Sigma_i})) \bmod 2$.

Si maintenant $(\mathbb{R}L \oplus \mathbb{R}M)_i$ n'est pas orientable, deux cas se présentent :

- soit on peut homotoper le fibré $(\mathbb{R}F)_i$ sur le fibré $(\mathbb{R}L)_i$ (si $\text{card}(\text{div}_\infty(\sigma|_{\mathbb{R}\Sigma_i})) = 0 \pmod 2$) et alors, d'après le Lemme 1.3, $(\text{rest}_2)_i(t_{L,\sigma}) = (\text{rest}_2)_i(\text{id}) = 0 = \text{card}(\text{div}_\infty(\sigma|_{\mathbb{R}\Sigma_i})) \pmod 2$ et $(\text{rest}_2)_i(t_{M,\sigma}) = (\text{rest}_2)_i(-\text{id}) = 1 = \text{card}(\text{div}_0(\sigma|_{\mathbb{R}\Sigma_i})) \pmod 2$.
- soit on peut homotoper $(\mathbb{R}F)_i$ sur $(\mathbb{R}M)_i$ (si $\text{card}(\text{div}_0(\sigma|_{\mathbb{R}\Sigma_i})) = 0 \pmod 2$) et alors $(\text{rest}_2)_i(t_{L,\sigma}) = (\text{rest}_2)_i(-\text{id}) = 1 = \text{card}(\text{div}_\infty(\sigma|_{\mathbb{R}\Sigma_i}))$ et $(\text{rest}_2)_i(t_{M,\sigma}) = (\text{rest}_2)_i(\text{id}) = 0 = \text{card}(\text{div}_0(\sigma|_{\mathbb{R}\Sigma_i}))$.

Ce qui conclut la démonstration du troisième point. \square

Démonstration du Théorème 2.1. — Remarquons tout d'abord qu'il nous suffit de traiter le cas $\text{rg}(N) = 2$. En effet, pour tout sous-fibré $(N', c_{N'})$ de N de rang 2, l'application

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{R}SL(N') & \rightarrow & \mathbb{R}SL(N) \\ \tilde{t} & \mapsto & \tilde{t} \oplus \text{id} \end{array}$$

commute avec τ_N et $\tau_{N'}$ et induit une surjection au niveau des classes d'homotopie.

Supposons donc que $\text{rg}(N) = 2$ et prenons $t \in \mathbb{R}SL(N)$. Fixons de plus un opérateur de Cauchy-Riemann induisant une structure holomorphe sur N faisant de ce dernier un fibré vectoriel holomorphe décomposable en une somme de deux fibrés en droites holomorphes (L, c_L) et (M, c_M) .

Prenons $\sigma_{M \otimes L^*}$ une section méromorphe et $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ -équivariante de $M \otimes L^*$. Pour toute fonction méromorphe f sur Σ_g , on obtient une nouvelle section $\sigma = f\sigma_{M \otimes L^*}$ dont on contrôle la parité des pôles et des zéros sur chaque composante réelle de Σ_g en modifiant les pôles et les zéros de f . On peut en effet considérer f comme section holomorphe d'un fibré $\mathcal{O}_\Sigma(x_1 + \dots + x_n)$ (pour n assez grand) où l'on place les points x_i sur $\mathbb{R}\Sigma_g$ pour changer à volonté la parité de ses zéros et pôles (qui est la même sur chaque composante de $\mathbb{R}\Sigma_g$). En particulier, prenons f de telle sorte que $(\text{rest}_2)_i(t) = \text{card}(\text{div}_0(\sigma|_{\mathbb{R}\Sigma_i})) \pmod 2$ pour tout $1 \leq i \leq k$. Le Lemme 2.2 nous assure alors que $\text{rest}_2(t) = \text{rest}_2(t_{L,\sigma})$, donc t et $t_{L,\sigma}$ ont même action sur les structures Pin^\pm sur $\mathbb{R}N$ d'après le Lemme 2.1. D'autre part, l'action d'un automorphisme sur les orientations du fibré $\text{Det}(N)$ ne dépend que de son image par rest_2 et non par rest . La conclusion du Théorème découle ainsi du Lemme 2.2. \square

2.3. Lacets d'opérateurs de Cauchy-Riemann et structures Pin^\pm

Nous décrivons ici l'orientabilité du fibré déterminant au-dessus de certains lacets d'opérateurs de Cauchy-Riemann réels. Pour ce faire, supposons fixée une structure complexe $J \in \mathbb{R}J(\Sigma_g)$. Considérons une famille $N_z \rightarrow \mathbb{C}P^1$, $z \in \mathbb{C}P^1$, de fibrés vectoriels complexes sur (Σ_g, c_Σ) . Nous supposerons de plus que les fibrés N_z admettent des structures réelles c_{N_z} lorsque z est dans $\mathbb{R}P^1$.

Nous disposons donc de k familles $(\mathbb{R}N_z)_i$, $z \in \mathbb{R}P^1$, de fibrés vectoriels réels sur $\mathbb{R}\Sigma_g$. À $z \in \mathbb{R}P^1$ fixé, chacun de ces fibrés $(\mathbb{R}N_z)_i$ admet une structure Pin^\pm ;

toutefois, lorsque z varie, il n'est pas garanti qu'il existe une famille continue de telles structures sur tout $\mathbb{R}P^1$. Si c'est le cas, nous dirons que la famille $(\mathbb{R}N_z)_i$ admet une structure Pin^\pm .

Si nous prenons maintenant un lacet $(\bar{\partial}_z)_{z \in \mathbb{R}P^1}$ d'opérateurs de Cauchy-Riemann réels sur $(N_z, c_{N_z})_{z \in \mathbb{R}P^1}$, nous obtenons naturellement un fibré en droites réelles $\text{Det}(\bar{\partial}_z) \rightarrow \mathbb{R}P^1$. Nous dirons que le lacet $(\bar{\partial}_z)_{z \in \mathbb{R}P^1}$ est orientable si le fibré $\text{Det}(\bar{\partial}_z)$ est orientable.

Exemple 2.1. — Un exemple de tel lacet est obtenu de la façon suivante. Considérons une extension $0 \rightarrow (F, c_F) \rightarrow (M, c_M) \rightarrow (G, c_G) \rightarrow 0$, où F, G (resp. M) sont des fibrés en droites (resp. de rang 2) holomorphes sur Σ_g . Celle-ci admet une classe d'extension $\mu \in H^1(\Sigma_g, F \otimes G^*)_{+1}$. Comme $H^1(\Sigma_g, F \otimes G^*)_{+1} = \Gamma(\Sigma_g, \Lambda^{0,1} \Sigma_g \otimes (F \otimes G^*))_{+1} / \text{im}(\bar{\partial}_{F \otimes G^*})_{+1}$, on notera $\tilde{\mu}$ un représentant de μ dans $\Gamma(\Sigma_g, \Lambda^{0,1} \Sigma_g \otimes (F \otimes G^*))_{+1}$. La classe μ induit une déformation $(N_z)_{z \in \mathbb{C}}$, de fibre exceptionnelle $N_0 = F \oplus G$ et trivialisable sur \mathbb{C}^* , de fibre générique $N_z \cong M$, $z \in \mathbb{C}^*$. Cette déformation s'étend donc à tout $\mathbb{C}P^1$, et on obtient un lacet d'opérateurs donnés par $\bar{\partial}_x = \begin{pmatrix} \bar{\partial}_F & x\mu \\ 0 & \bar{\partial}_G \end{pmatrix}$, $x \in \mathbb{R}$. L'orientabilité de ce lacet est alors décrite par le Théorème 2.2.

Le résultat suivant donne une condition topologique sur l'orientabilité des lacets d'opérateurs considérés (comparer avec la Proposition 8.1.7 de [11]).

Théorème 2.2. — *Fixons une structure complexe J sur (Σ_g, c_Σ) . Soit $N_z \rightarrow \mathbb{C}P^1$, $z \in \mathbb{C}P^1$, une famille de fibrés vectoriels complexes de rang au moins 2 sur (Σ_g, c_Σ) admettant des structures réelles c_{N_z} lorsque $z \in \mathbb{R}P^1$. Supposons de plus qu'il existe un point réel $p \in \mathbb{R}\Sigma_g$ tel que le fibré $(\mathbb{R}N_z)_p$ sur $\mathbb{R}P^1$ soit orientable. Alors, un lacet $(\bar{\partial}_z)_{z \in \mathbb{R}P^1}$ d'opérateurs de Cauchy-Riemann réels sur $(N_z)_{z \in \mathbb{R}P^1}$ est orientable si et seulement si les familles $(\mathbb{R}N_z)_i$ qui n'admettent pas de structure Pin^\pm sont en nombre pair.*

Faisons tout d'abord quelques remarques préliminaires à la démonstration de ce Théorème. Fixons les deux ouverts de cartes affines $0 \in U_0$ et $\infty \in U_1$ de $\mathbb{C}P^1$. Les familles $(N_z, c_{N_z}) \rightarrow \mathbb{R}P^1$, $z \in \mathbb{R}P^1$, de fibrés vectoriels complexes munis de structures réelles sur (Σ_g, c_Σ) sont classifiées par $H^1(\mathbb{R}P^1, \mathbb{R}GL(N))$ (où $(N_z, c_{N_z}) \cong (N, c_N)$ pour $z \in \mathbb{R}P^1$). Une telle famille est donnée par une application de recollement

$$\begin{cases} \mathbb{R}U_0 \cap \mathbb{R}U_1 \times N & \rightarrow \mathbb{R}U_0 \cap \mathbb{R}U_1 \times N \\ (z, \xi) & \mapsto (z, t_z(\xi)) \end{cases}$$

où $t_z = \text{id}_N$ pour $z > 0$ et $t_z \in \mathbb{R}GL(N)$ pour $z < 0$. Toutefois, si l'on impose que cette famille s'étende sur tout $\mathbb{C}P^1$, il faut que t_z pour $z < 0$ soit homotope dans $GL(N)$ à id_N , et on obtient alors un prolongement donné par l'application de recollement

$$\begin{cases} U_0 \cap U_1 \times N & \rightarrow U_0 \cap U_1 \times N \\ (z, \xi) & \mapsto (z, t_z(\xi)) \end{cases}$$

où $(t_z)_{z \in \mathbb{C}^*}$ est une famille d'éléments de $GL(N)$ prolongeant $(t_z)_{z \in \mathbb{R}^*}$. Or, l'existence d'une telle homotopie est équivalente à ce que le déterminant $\det(t_z) \in \mathbb{R}\mathcal{C}^\infty(\Sigma_g, \mathbb{C}^*)$ soit homotope à la fonction constante 1 dans l'espace $\mathcal{C}^\infty(\Sigma_g, \mathbb{C}^*)$ pour tout $z \in \mathbb{R}^*$. Si nous supposons de plus qu'il existe un point réel $p \in \mathbb{R}\Sigma_g$ tel que le fibré $(\mathbb{R}N_z)_p$ sur $\mathbb{R}P^1$ soit orientable alors forcément $\det(t_z)$ pour $z < 0$ est homotope dans $\mathbb{R}\mathcal{C}^\infty(\Sigma_g, \mathbb{C}^*)$ à la fonction constante égale à 1.

Nous pouvons ainsi supposer que les familles considérées sont données par des applications de transition qui, restreintes à $\mathbb{R}P^1$ sont dans $\mathbb{R}SL(N)$.

Démonstration du Théorème 2.2. — Prenons une famille $N_z \rightarrow \mathbb{C}P^1$ de fibrés vectoriels complexes sur (Σ_g, c_Σ) comme décrit dans l'énoncé du Théorème 2.2. Elle est donnée par une application de recollement

$$\begin{cases} U_0 \cap U_1 \times N & \rightarrow U_0 \cap U_1 \times N \\ (z, \xi) & \mapsto (z, t_z(\xi)) \end{cases}$$

où lorsque $z \in \mathbb{R}^*$, $t_z = \text{id}_N$ pour $z > 0$ et $t_z \in \mathbb{R}SL(N)$ pour $z < 0$.

D'une part, une des familles $(\mathbb{R}N_z)_i$, $z \in \mathbb{R}P^1$, admet une structure Pin^\pm si et seulement si les t_z , $z \in \mathbb{R}^*$, agissent trivialement sur les structures Pin^\pm sur $(\mathbb{R}N)_i$.

D'autre part, le fibré déterminant associé à un lacet $(\bar{\partial}_z)_{z \in \mathbb{R}P^1}$ d'opérateurs de Cauchy-Riemann réels sur $(N_z)_{z \in \mathbb{R}P^1}$ est donné par les changements de cartes

$$\begin{cases} U_0 \cap U_1 \cap \mathbb{R}P^1 \times \mathbb{R} & \rightarrow U_0 \cap U_1 \cap \mathbb{R}P^1 \times \mathbb{R} \\ (z, v) & \mapsto (z, t_z.v). \end{cases}$$

Le Théorème 2.1 nous assure alors que ce fibré est orientable si et seulement si le nombre de composantes de $\mathbb{R}N$ dont les structures Pin^\pm sont échangées sous l'action de t_z est pair. Ce qui conclut la démonstration du Théorème 2.2. \square

CHAPITRE 3

ÉTUDE DES AUTOMORPHISMES RÉELS AU-DESSUS DE L'IDENTITÉ

Nous nous intéressons dans ce paragraphe à l'action des éléments de $\mathbb{R}GL(N)$ sur les orientations du fibré $\text{Det}(N)$. Nous remarquons tout d'abord qu'il suffit de traiter le cas où N est un fibré en droites complexes. En effet, d'après le Lemme 1.1 nous avons un isomorphisme

$$(*) \quad (N, c_N) \cong (\det(N), c_{\det(N)}) \oplus (\underline{\mathbb{C}}^{\text{rg}(N)-1}, \text{conj}).$$

Ainsi, un élément $f \in \mathbb{R}GL(N)$ se décompose sous l'isomorphisme $(*)$ en

$$f = (\det(f) \oplus \text{id}_{\underline{\mathbb{C}}^{\text{rg}(N)-1}}) \circ ((\det(f) \oplus \text{id}_{\underline{\mathbb{C}}^{\text{rg}(N)-1}})^{-1} \circ f).$$

Or, l'automorphisme $(\det(f) \oplus \text{id}_{\underline{\mathbb{C}}^{\text{rg}(N)-1}}) \circ f$ est un élément de $\mathbb{R}SL(N)$, et son action a été étudiée au paragraphe précédent. D'autre part, étudier l'action de l'automorphisme $(\det(f) \oplus \text{id}_{\underline{\mathbb{C}}^{\text{rg}(N)-1}})$ sur les orientations de $\text{Det}(N)$ revient à étudier celle de $\det(f)$ sur $\text{Det}(\det(N))$. On remarque enfin (voir [17]) que $(\det(f) \oplus \text{id}_{\underline{\mathbb{C}}^{\text{rg}(N)-1}})$ agit trivialement sur les structures Pin^\pm sur les $(\mathbb{R}N)_i$.

Nous allons donc étudier les automorphismes réels au-dessus de l'identité des fibrés en droites complexes munis de structure réelles sur (Σ_g, c_Σ) . Or ceux-ci s'identifient canoniquement aux fonctions

$$\mathbb{R}\mathcal{C}^\infty(\Sigma_g, \mathbb{C}^*) = \{f : \Sigma_g \rightarrow \mathbb{C}^* \mid \overline{f \circ c_\Sigma} = f\}.$$

Nous noterons $[(\Sigma_g, c_\Sigma), (\mathbb{C}^*, \text{conj})]$ l'espace des fonctions \mathcal{C}^∞ sur Σ_g à valeurs dans \mathbb{C}^* , $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ -équivariantes, prises à homotopie près.

Cette section est divisée en trois parties. Dans un premier temps, nous étudions l'action des automorphismes réels sur les structures Spin réelles de (Σ_g, c_Σ) . Dans un deuxième temps, nous relierons cette dernière action à celle sur les orientations du fibré déterminant et démontrons en particulier les résultats suivant (voir §3.2).

Théorème 3.1. — *Soit (N, c_N) un fibré vectoriel complexe de rang 1 muni d'une structure réelle sur (Σ_g, c_Σ) , de partie réelle non vide. Soit $f \in \mathbb{R}GL(N) = \mathbb{R}\mathcal{C}^\infty(\Sigma_g, \mathbb{C}^*)$. Si f est positive sur $\mathbb{R}\Sigma_g$ et préserve une structure Spin réelle sur (Σ_g, c_Σ) alors f préserve les orientations du fibré $\text{Det}(N)$.*

Théorème 3.2. — *Soit (N, c_N) un fibré vectoriel complexe de rang 1 muni d'une structure réelle sur (Σ_g, c_Σ) , de partie réelle non vide. Soit $f \in \mathbb{R}GL(N) = \mathbb{R}\mathcal{C}^\infty(\Sigma_g, \mathbb{C}^*)$. Si le degré de N n'est pas de même parité que le genre de Σ_g , alors*

l'action de f sur les orientations du fibré $\text{Det}(N)$ coïncide avec l'action de f sur les classes de bordisme de structures Spin réelles de (Σ_g, c_Σ) de même première classe de Stiefel-Whitney que $\mathbb{R}N$.

Lorsque le degré du fibré N a même parité que le genre de Σ_g , l'automorphisme $- \text{id}$ renverse les orientations du fibré $\text{Det}(N)$ d'après le Théorème de Riemann-Roch, et le Théorème 3.2 doit être modifié en tenant compte du signe de f sur les composantes orientables de $\mathbb{R}N$ (voir le Théorème 3.5). Nous obtenons alors comme au paragraphe précédent une interprétation topologique de l'action de $\mathbb{R}GL(N)$ sur les orientations de $\text{Det}(N)$.

Nous terminons en déduisant la première classe de Stiefel-Whitney du fibré induit par le fibré déterminant sur le groupe de Picard réel d'une courbe (Σ_g, c_Σ) .

3.1. Automorphismes réels et structures Spin réelles

Nous exposons dans ce paragraphe quelques préliminaires algébriques et topologiques à l'étude de l'action des éléments de $\mathbb{R}GL(N)$ sur les orientations du fibré $\text{Det}(N)$. Nous commençons par expliciter la structure du groupe $[(\Sigma_g, c_\Sigma), (\mathbb{C}^*, \text{conj})]$. Puis, nous rappelons quelques notions à propos des structures Spin réelles sur une courbe réelle. Nous décrivons enfin l'action des éléments de $\mathbb{R}GL(N)$ sur ces structures. Rappelons aussi que toutes les courbes réelles que nous considérons sont de partie réelle non vide.

3.1.1. Structure de $[(\Sigma_g, c_\Sigma), (\mathbb{C}^*, \text{conj})]$. — Rappelons tout d'abord quelques résultats sur la topologie des courbes réelles (voir par exemple [22] et [23]). Si $\Sigma_g - \mathbb{R}\Sigma_g$ a deux composantes connexes, nous dirons que la courbe réelle est séparante. On rappelle que lorsque la courbe est séparante $k = b_0(\mathbb{R}\Sigma_g)$ est congru à $g + 1$ modulo 2. On pose dans ce cas $m = \frac{g + 1 - k}{2}$, qui est le genre d'une des composantes de $\Sigma_g - \mathbb{R}\Sigma_g$.

Définition 3.1 (voir [23] et Figure 1). — *On suppose que $\mathbb{R}\Sigma_g$ est non vide, et soit $p \in \mathbb{R}\Sigma_g$. Une base symplectique réelle de $H_1(\Sigma_g, \mathbb{Z})$ est une base symplectique $(a_i, b_i)_{i=1\dots g}$ vérifiant de plus*

si (Σ_g, c_Σ) n'est pas séparante :

1. $(c_\Sigma)_*(a_i) = a_i, i = 1, \dots, g$
2. $(c_\Sigma)_*(b_i) = -b_i, i = 1, \dots, k - 1$
3. $(c_\Sigma)_*(b_i) = -b_i + a_i, i = k, \dots, g$

4. p se trouve sur la composante de $\mathbb{R}\Sigma_g$ homologue à $\sum_{i=1}^g a_i$

si (Σ_g, c_Σ) est séparante :

1. $(c_\Sigma)_*(a_i) = a_i, i = 1, \dots, k - 1$
2. $(c_\Sigma)_*(b_i) = -b_i, i = 1, \dots, k - 1$
3. $(c_\Sigma)_*(a_i) = a_{i+m}, i = k, \dots, k + m - 1$

$$4. (c_\Sigma)_*(b_i) = -b_{i+m}, i = k, \dots, k+m-1$$

$$5. p \text{ se trouve sur la composante de } \mathbb{R}\Sigma_g \text{ homologue à } \sum_{i=1}^{k-1} a_i.$$

L'existence d'une telle base est démontrée par Natanzon dans [23].

Nous allons décrire une famille \mathcal{B} génératrice d'éléments de $[(\Sigma_g, c_\Sigma), (\mathbb{C}^*, \text{conj})]$, ce qui nous sera utile par la suite. Pour cela, fixons une base symplectique réelle (a_i, b_i) de $H_1(\Sigma_g, \mathbb{Z})$ en imposant de plus que les éléments de cette base soient représentés par des courbes simples disjointes lorsque c'est possible, que $a_i = [\mathbb{R}\Sigma_g]_i$ pour $i \in \{1, \dots, k-1\}$, et que pour une courbe séparante, les courbes a_k, \dots, a_g soient globalement stables par c_Σ . Nous numérotions de plus $(\mathbb{R}\Sigma_g)_0$ la composante sur laquelle se trouve p (voir Figure 1).

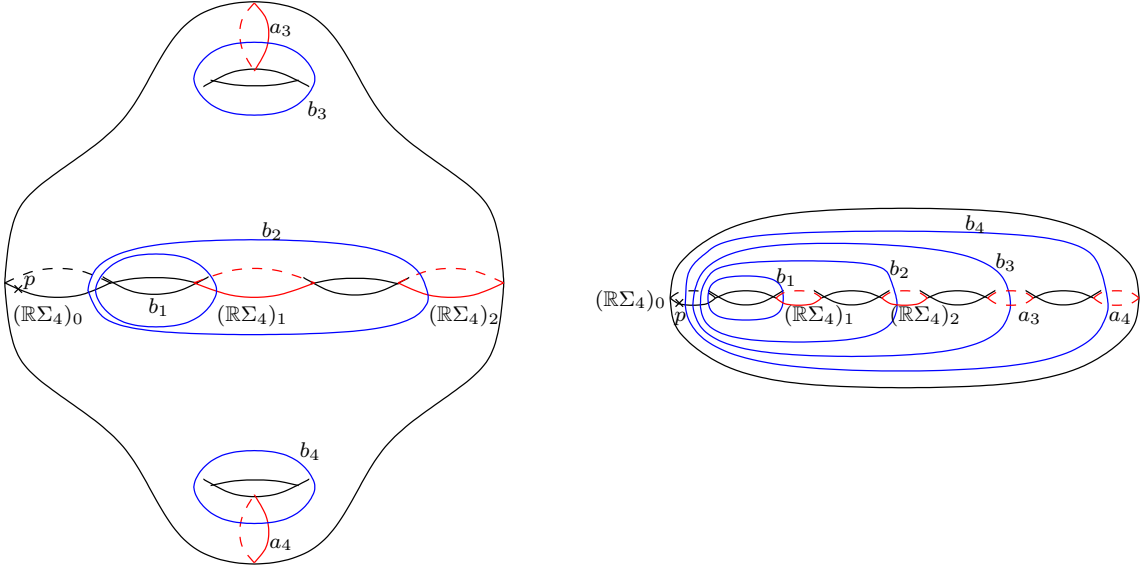
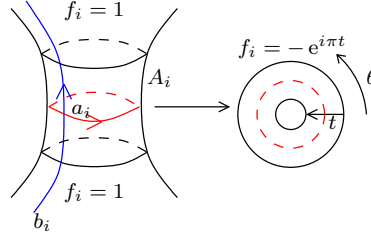


FIGURE 1. Une base symplectique réelle pour $g = 4$, $\varepsilon(\Sigma_4) = 1$ et $k = 3$ à gauche et $g = 4$, $\varepsilon(\Sigma_4) = 0$ et $k = 2$ à droite

Remarquons qu'une fois fixée une telle base symplectique, les composantes de $\mathbb{R}\Sigma_g$ sont orientées.

Construisons maintenant la famille génératrice \mathcal{B} :

si (Σ_g, c_Σ) n'est pas séparante : On commence par choisir des petits voisinages tubulaires $A_i \subset \Sigma_g$, invariants par c_Σ , ayant pour âmes les courbes a_i , et disjoints les uns des autres. On choisit $t \in [-1, 1]$ une coordonnée transverse à a_i dans A_i de telle sorte que a_i soit la courbe de niveau $t = 0$, et $\theta \in a_i = S^1 \subset \mathbb{C}$ l'autre coordonnée. Nous imposons de plus que θ croît le long de a_i et que le difféomorphisme entre A_i et $S^1 \times [-1, 1]$ donné par les coordonnées (θ, t) préserve les orientations. On suppose aussi que dans ces coordonnées, la structure réelle s'écrit $c_\Sigma(t, \theta) = (-t, \theta)$ si $i = 0, \dots, k-1$ et $c_\Sigma(t, \theta) = (-t, -\theta)$ si $i = k, \dots, g$. On obtient alors les fonctions (à homotopie près) f_i , $i = 0, \dots, g$, réelles, en posant $f_i(t, \theta) = -e^{i\pi t}$ sur A_i et en prolongeant par 1 ailleurs (voir Figure 2).

FIGURE 2. Construction de f_i

si (Σ_g, c_Σ) est séparante : On procède de la même façon que précédemment pour obtenir k fonctions f_0, \dots, f_{k-1} associées aux k courbes a_0, \dots, a_{k-1} . On construit ensuite $g + 1 - k$ autres fonctions $f_k, g_k, \dots, f_{k+m-1}, g_{k+m-1}$ en définissant f_i (resp. g_i) de la même façon localement autour de a_i (resp. b_i) puis en prolongeant grâce à c_Σ au voisinage de a_{i+m} (resp. b_{i+m}) et par 1 ailleurs.

Nous montrons dans la suite que les éléments de $[(\Sigma_g, c_\Sigma), (\mathbb{C}^*, conj)]$ sont, à peu de choses près, totalement déterminés par leurs indices le long des courbes dans Σ_g .

Lemme 3.1. — *L'application de calcul d'indice*

$$\begin{aligned} \widetilde{\text{ind}} : \mathbb{RC}^\infty(\Sigma_g, \mathbb{C}^*) &\rightarrow \mathbb{R} \text{Hom}(H_1(\Sigma_g, \mathbb{Z}), \mathbb{Z}) \\ f &\mapsto (c \mapsto \frac{1}{2i\pi} \int_c \frac{df}{f}) \end{aligned}$$

passé au quotient en un morphisme

$$\text{ind} : [(\Sigma_g, c_\Sigma), (\mathbb{C}^*, conj)] \rightarrow H^1(\Sigma_g, \mathbb{Z})_{-1}.$$

Démonstration. — Remarquons tout d'abord que le changement d'espace d'arrivée est conséquence du théorème des coefficients universels et du calcul suivant : pour $f \in \mathbb{RC}^\infty(\Sigma_g, \mathbb{C}^*)$ et $c \in H_1(\Sigma_g, \mathbb{Z})$

$$\begin{aligned} ((c_\Sigma)^*(\widetilde{\text{ind}}(f)))(c) &= (\widetilde{\text{ind}}(f))((c_\Sigma)_*(c)) \\ &= \frac{1}{2i\pi} \int_{(c_\Sigma)_*(c)} \frac{df}{f} \\ &= \frac{1}{2i\pi} \int_c \frac{d(f \circ c_\Sigma)}{f \circ c_\Sigma} \\ &= (\widetilde{\text{ind}}(\bar{f}))(c) \\ &= -(\widetilde{\text{ind}}(f))(c). \end{aligned}$$

Puis, comme $H^1(\Sigma_g, \mathbb{Z})_{-1}$ est discret, deux éléments de $\mathbb{RC}^\infty(\Sigma_g, \mathbb{C}^*)$ qui sont homotopes ont même indice, et $\widetilde{\text{ind}}$ passe bien au quotient. \square

Exemple 3.1. — Calculons les indices pour la famille \mathcal{B} ; l'exposant PD indique que nous prenons le dual de Poincaré de la classe de (co)homologie considérée. Nous avons les cas suivant :

- si (Σ_g, c_Σ) n'est pas séparante : $\text{ind}(f_i) = (a_i)^{\text{PD}}$ pour $i = 1, \dots, g$.
- si (Σ_g, c_Σ) est séparante : $\text{ind}(f_i) = (a_i)^{\text{PD}}$ pour $i = 1, \dots, k-1$, $\text{ind}(f_i) = (a_i + a_{i+m})^{\text{PD}}$ et $\text{ind}(g_i) = (b_i - b_{i+m})^{\text{PD}}$ pour $i = k, \dots, k+m-1$.

Posons ensuite

$$\mathbb{RC}^\infty(\Sigma_g, \mathbb{C}^*)_0 := \{f \in \mathbb{RC}^\infty(\Sigma_g, \mathbb{C}^*) \mid \exists g : \Sigma_g \rightarrow \mathbb{C}, \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}\text{-équivariante}, f = \exp(g)\}.$$

C'est donc l'ensemble des fonctions sur Σ_g qui admettent un logarithme $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ -équivariant.

Lemme 3.2. — $\mathbb{RC}^\infty(\Sigma_g, \mathbb{C}^*)_0$ est la composante connexe de la fonction constante égale à 1 dans $\mathbb{RC}^\infty(\Sigma_g, \mathbb{C}^*)$. Ainsi, on a

$$[(\Sigma_g, c_\Sigma), (\mathbb{C}^*, conj)] = \mathbb{RC}^\infty(\Sigma_g, \mathbb{C}^*) / \mathbb{RC}^\infty(\Sigma_g, \mathbb{C}^*)_0.$$

Démonstration. — — $\mathbb{RC}^\infty(\Sigma_g, \mathbb{C}^*)_0$ est ouvert : si $f \in \mathbb{RC}^\infty(\Sigma_g, \mathbb{C}^*)$ et $g \in \mathbb{RC}^\infty(\Sigma_g, \mathbb{C})$ vérifient

$$|f - \exp(g)| < \frac{1}{2} \inf |\exp(g)|$$

alors

$$\left| \frac{f}{\exp(g)} - 1 \right| < \frac{1}{2}$$

donc il existe $h \in \mathbb{RC}^\infty(\Sigma_g, \mathbb{C})$ avec

$$\frac{f}{\exp(g)} = \exp(h).$$

De plus, $\exp(h|_{\mathbb{R}\Sigma}) \in \mathbb{R}_+^*$, et donc $h \circ c_\Sigma - \bar{h} = 4i\pi k$, pour un $k \in \mathbb{Z}$. Ainsi $f = \exp(h - 2i\pi k + g) \in \mathbb{RC}^\infty(\Sigma_g, \mathbb{C}^*)_0$.

— $\mathbb{RC}^\infty(\Sigma_g, \mathbb{C}^*)_0$ est fermé car

$$\mathbb{RC}^\infty(\Sigma_g, \mathbb{C}^*) \setminus \mathbb{RC}^\infty(\Sigma_g, \mathbb{C}^*)_0 = \bigsqcup_{f \in \mathbb{RC}^\infty(\Sigma_g, \mathbb{C}^*) \setminus \mathbb{RC}^\infty(\Sigma_g, \mathbb{C}^*)_0} f \mathbb{RC}^\infty(\Sigma_g, \mathbb{C}^*)_0.$$

— Enfin, $1 \in \mathbb{RC}^\infty(\Sigma_g, \mathbb{C}^*)_0$.

□

Lemme 3.3. — La suite suivante est exacte :

$$(*) \quad 0 \rightarrow \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \xrightarrow{-1} [(\Sigma_g, c_\Sigma), (\mathbb{C}^*, conj)] \xrightarrow{\text{ind}} H^1(\Sigma_g, \mathbb{Z})_{-1} \rightarrow 0.$$

De plus, la famille \mathcal{B} engendre $[(\Sigma_g, c_\Sigma), (\mathbb{C}^*, conj)]$.

Démonstration. — — La surjectivité du morphisme ind provient directement de l'Exemple 3.1 : l'image de \mathcal{B} par ind engendre $H^1(\Sigma_g, \mathbb{Z})_{-1}$.

— Si f est dans le noyau de ind , alors en particulier elle a le même signe sur chaque composante de $\mathbb{R}\Sigma_g$. Quitte à la multiplier par -1 , nous pouvons supposer que f est positive sur $\mathbb{R}\Sigma_g$. Montrons que la fonction f admet un logarithme $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ -équivariant. Notons pour cela $\pi : \tilde{\Sigma}_g \rightarrow \Sigma_g$ le revêtement

universel de Σ_g . Comme $\widetilde{\Sigma}_g$ est simplement connexe, il existe $G : \widetilde{\Sigma}_g \rightarrow \mathbb{C}$ telle que le diagramme suivant commute

$$\begin{array}{ccc} \widetilde{\Sigma}_g & \xrightarrow{G} & \mathbb{C} \\ \pi \downarrow & \searrow & \downarrow \exp \\ \Sigma_g & \xrightarrow{f} & \mathbb{C}^*. \end{array}$$

De plus, si $z, z' \in \widetilde{\Sigma}_g$ vérifient $\pi(z) = \pi(z')$, alors on a $G(z) = G(z')$. En effet, prenons un chemin continu $\gamma : [0, 1] \rightarrow \widetilde{\Sigma}_g$ reliant z à z' . On obtient un lacet $\pi \circ \gamma \in \pi_1(\Sigma_g, \pi(z))$ dont l'image par f est un lacet contractible dans \mathbb{C}^* car f est d'indice nul. Par définition, $G(z)$ et $G(z')$ ne diffèrent que par l'action de $f \circ \pi \circ \gamma \in \pi_1(\mathbb{C}^*)$ qui est nul. Ainsi $G(z) = G(z')$ et on en déduit qu'il existe $g \in \mathcal{C}^\infty(\Sigma_g, \mathbb{C})$ telle que $\exp(g) = f$. De plus, comme f est $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ -équivariante et positive sur $\mathbb{R}\Sigma_g$, il existe $k \in \mathbb{Z}$ tel que $g \circ c_\Sigma - \bar{g} = 4i\pi k$. Ainsi $g - 2i\pi k$ donne un logarithme $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ -équivariant de f .

D'après le Lemme 3.2, la classe de f dans $[(\Sigma_g, c_\Sigma), (\mathbb{C}^*, \text{conj})]$ est donc celle de la fonction constante égale à 1.

Le noyau de ind est donc constitué des deux éléments 1 (qui admet un logarithme $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ -équivariant) et -1 (qui admet un logarithme qui n'est pas $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ -équivariant). □

Remarque 3.1. — La démonstration du Lemme 3.3 montre même que la suite (*) est scindée. En fait nous avons un isomorphisme non canonique

$[(\Sigma_g, c_\Sigma), (\mathbb{C}^*, \text{conj})] \cong \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \times [(\Sigma_g, c_\Sigma), (\mathbb{C}^*, \text{conj})]_{+a_0} = \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \times H^1(\Sigma_g, \mathbb{Z})_{-1}$
où $[(\Sigma_g, c_\Sigma), (\mathbb{C}^*, \text{conj})]_{+a_0}$ est le sous groupe de $[(\Sigma_g, c_\Sigma), (\mathbb{C}^*, \text{conj})]$ composé des fonctions positives sur la composante $(\mathbb{R}\Sigma_g)_0$. Si on place le point $p \in \mathbb{R}\Sigma_g$ sur une autre composante $(\mathbb{R}\Sigma_g)_i$, nous obtenons l'isomorphisme

$$\begin{aligned} \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \times H^1(\Sigma_g, \mathbb{Z})_{-1} &\rightarrow \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \times H^1(\Sigma_g, \mathbb{Z})_{-1} \\ (\epsilon, \alpha) &\mapsto (\epsilon + \alpha(b_i), \alpha). \end{aligned}$$

3.1.2. Structures *Spin* réelles sur (Σ_g, c_Σ) . — Nous rappelons quelques faits à propos des structures *Spin* sur Σ_g (voir [2], [16], [20] et [23] par exemple) Nous supposons que (Σ_g, c_Σ) est munie d'une métrique riemannienne réelle, que son genre g est au moins 1, et que $\mathbb{R}\Sigma_g \neq \emptyset$. Le choix de la métrique n'influe pas sur les résultats que nous allons énoncer, pour la même raison mentionnée dans la Remarque 2.1.

Notons R_Σ^+ le fibré principal des repères orthonormés directs du fibré tangent à Σ_g . Ce fibré a pour groupe $SO_2(\mathbb{R})$; celui-ci admet un revêtement double non trivial $Spin(2)$ (voir [3]). Une structure *Spin* sur Σ_g est la donnée d'une classe d'isomorphisme de paires composées d'un fibré principal $\pi : P_{Spin} \rightarrow \Sigma_g$ de groupe $Spin(2)$ et d'un morphisme de fibrés $P_{Spin} \rightarrow R_\Sigma^+$ équivariant pour les actions

de $SO_2(\mathbb{R})$ et $Spin(2)$. L'obstruction à l'existence d'une telle structure *Spin* est donnée par la seconde classe de Stiefel-Whitney de la surface. Or comme celle-ci est orientable, sa caractéristique d'Euler est paire. Nous avons donc $w_2(T\Sigma_g) = 0$, et la surface admet une structure *Spin*.

Les structures *Spin* sur Σ_g forment un ensemble $Spin(\Sigma_g)$ qui est en bijection avec les éléments de $H^1(R_\Sigma^+, \mathbb{Z}/2\mathbb{Z})$ non triviaux dans les fibres. Plus précisément, la suite spectrale de Leray-Serre associée à la fibration $SO_2(\mathbb{R}) \xrightarrow{i} R_\Sigma^+ \xrightarrow{\pi} \Sigma_g$ donne :

$$(*) \quad 0 \rightarrow H^1(\Sigma_g, \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}) \xrightarrow{\pi^*} H^1(R_\Sigma^+, \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}) \xrightarrow{i^*} H^1(SO_2(\mathbb{R}), \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}) \rightarrow 0$$

et $Spin(\Sigma_g) = \{\zeta \in H^1(R_\Sigma^+, \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}) \mid i^*(\zeta) \neq 0\}$. C'est un espace affine sur $H^1(\Sigma_g, \mathbb{Z}/2\mathbb{Z})$.

On note $z \in H_1(R_\Sigma^+, \mathbb{Z}/2\mathbb{Z})$ la classe de la fibre. Johnson dans [16] affirme alors que pour tout $a \in H_1(\Sigma_g, \mathbb{Z}/2\mathbb{Z})$, on a un relevé canoniquement associé $\tilde{a} \in H_1(R_\Sigma^+, \mathbb{Z}/2\mathbb{Z})$. Si a s'écrit comme une somme de courbes simples a_i , $1 \leq i \leq m$, on note alors \vec{a}_i les éléments de $H_1(R_\Sigma^+, \mathbb{Z}/2\mathbb{Z})$ induits par les champs de vecteurs tangents unitaires de ces courbes, et on pose $\tilde{a} = \sum_{i=1}^m \vec{a}_i + mz$. Toutefois, ce relevé ne scinde pas la suite duale à (*). En effet, si on note \bullet le produit d'intersection sur $H_1(\Sigma_g, \mathbb{Z}/2\mathbb{Z})$, nous avons

$$\widetilde{a+b} = \tilde{a} + \tilde{b} + (a \bullet b)z.$$

Cette dernière égalité nous fournit une identification entre structures *Spin* sur Σ_g et formes quadratiques sur $H_1(\Sigma_g, \mathbb{Z}/2\mathbb{Z})$ en associant à $\zeta \in Spin(\Sigma_g)$ l'application

$$\begin{aligned} q_\zeta : H_1(\Sigma_g, \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}) &\rightarrow \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \\ a &\mapsto \langle \zeta, \tilde{a} \rangle \end{aligned}$$

où le crochet de dualité est donné par $H^1(R_\Sigma^+, \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}) = Hom(H_1(R_\Sigma^+, \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}), \mathbb{Z}/2\mathbb{Z})$ (coefficients universels).

D'autre part, comme remarqué par Atiyah [2], étant fixée une structure complexe sur Σ_g , ses structures *Spin* sont aussi en correspondance avec l'ensemble $S(\Sigma_g)$ des racines carrées holomorphes du fibré canonique K_Σ . Si ζ est un élément de $Spin(\Sigma_g)$, on notera L_ζ l'élément de $S(\Sigma_g)$ associé de la façon suivante. La structure ζ vue comme élément de $H^1(R_\Sigma^+, \mathbb{Z}/2\mathbb{Z})$ correspond à un revêtement double (à isomorphisme près) du $U_1 = SO_2(\mathbb{R})$ fibré principal R_Σ^+ dont la restriction à la fibre est $z \in U_1 \mapsto z^2 \in U_1$, et donc à un fibré en droites complexes L_ζ et un isomorphisme $\alpha : L_\zeta^2 \rightarrow K_\Sigma$ (à isomorphisme près). Le fibré L_ζ hérite alors d'une structure holomorphe rendant α holomorphe. L'ensemble $S(\Sigma_g)$ admet de plus une forme quadratique naturelle (voir [2] ou [13]).

Théorème 3.3 (Relation de Riemann-Mumford). — *L'application*

$$\begin{aligned} \varphi : S(\Sigma_g) &\rightarrow \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \\ L &\mapsto \dim H^0(L) \pmod{2} \end{aligned}$$

est une forme quadratique associée au produit cup sur $H^1(\Sigma_g, \mathbb{Z}/2\mathbb{Z})$. \square

Lorsqu'on « linéarise » cette forme en L_ζ , on obtient

$$\begin{aligned}\varphi_{L_\zeta}(a) &= q_\zeta(a), \quad \forall a \in H_1(\Sigma_g, \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}) \\ \text{où } \varphi_{L_\zeta}(a) &= \varphi(L_\zeta + a^{\text{PD}}) - \varphi(L_\zeta).\end{aligned}$$

On identifiera dans la suite

$$\begin{aligned}\text{Spin}(\Sigma_g) &= \{q : H_1(\Sigma_g, \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}) \rightarrow \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}, \text{ quadratique}\} \\ &= \{L \in S(\Sigma_g)\}.\end{aligned}$$

Nous allons maintenant utiliser la structure réelle sur Σ_g . Nous noterons $(c_\Sigma)_*$ et $(c_\Sigma)^*$ les automorphismes de $H_1(\Sigma_g, \mathbb{Z}/2\mathbb{Z})$ et $H^1(\Sigma_g, \mathbb{Z}/2\mathbb{Z})$ induits par c_Σ . L'action de c_Σ sur $S(\Sigma_g)$ est induite par celle de c_Σ sur les diviseurs.

Notons J la structure complexe fixée sur Σ_g , et supposons quitte à changer la métrique que J est orthogonale pour la métrique fixée sur Σ_g . Posons $\overline{\Sigma_g}$ la surface Σ_g munie de l'orientation opposée et de la structure complexe $-J$. Considérons le morphisme

$$\begin{aligned}R : \quad R_\Sigma^+ &\rightarrow R_{\overline{\Sigma}}^+ \\ (z, (v, Jv)) &\mapsto (z, (v, -Jv)).\end{aligned}$$

Nous obtenons alors une involution

$$(\text{dc}_\Sigma \circ R)^* : \text{Spin}(\Sigma_g) \rightarrow \text{Spin}(\Sigma_g).$$

Définition 3.2. — *L'ensemble des structures Spin réelles sur (Σ_g, c_Σ) est l'ensemble $\mathbb{R}\text{Spin}(\Sigma_g) = \text{Fix}((\text{dc}_\Sigma \circ R)^*)$.*

Nous rappelons le lemme suivant (voir par exemple [8]).

Lemme 3.4. — *Supposons que $\mathbb{R}\Sigma_g \neq \emptyset$, et soit $\zeta \in \text{Spin}(\Sigma_g)$. Alors les trois conditions suivantes sont équivalentes :*

- (i) $\zeta \in \mathbb{R}\text{Spin}(\Sigma_g)$,
- (ii) $(c_\Sigma)^* q_\zeta = q_\zeta$,
- (iii) $(c_\Sigma)^* L_\zeta = L_\zeta$.

Démonstration. — (i) \Leftrightarrow (ii) : Pour ce premier point nous montrons directement que $q_\zeta \circ (c_\Sigma)_* = q_{(\text{dc}_\Sigma \circ R)^*\zeta}$. Prenons $a = \sum_{i=1}^m a_i \in H_1(\Sigma_g, \mathbb{Z}/2\mathbb{Z})$ où les a_i sont des courbes simples. Par définition,

$$q_{(\text{dc}_\Sigma \circ R)^*\zeta}(a) = \langle \zeta, (\text{dc}_\Sigma \circ R)_* \left(\sum_{i=1}^m \overrightarrow{a_i} + mz \right) \rangle \text{ et}$$

$$q_\zeta \circ (c_\Sigma)_*(a) = \langle \zeta, \sum_{i=1}^m \overrightarrow{(c_\Sigma)_*(a_i)} + mz \rangle.$$

Or, d'une part, $(\text{dc}_\Sigma \circ R)_*(z) = z$. D'autre part, si $\overrightarrow{a_i}$ est induit par le champ de vecteurs unitaires v_i tangent à a_i , c'est-à-dire si $\overrightarrow{a_i} = (v_i, Jv_i)$, alors le lacet $(\text{dc}_\Sigma)_*(\overrightarrow{a_i}) = (\text{dc}_\Sigma(v_i), -J\text{dc}_\Sigma(v_i)) \in H_1(R_\Sigma^+, \mathbb{Z}/2\mathbb{Z})$ est obtenu à partir du lacet $\overrightarrow{(c_\Sigma)_*(a_i)} = (\text{dc}_\Sigma(v_i), J\text{dc}_\Sigma(v_i)) \in H_1(R_\Sigma^+, \mathbb{Z}/2\mathbb{Z})$ en renversant

l'orientation de Σ_g . Nous avons donc $(dc_\Sigma \circ R)_* \left(\sum_{i=1}^m \vec{a}_i \right) = \sum_{i=1}^m \overrightarrow{(c_\Sigma)_*(a_i)}$, ce qui conclut cette première équivalence.

(ii) \Leftrightarrow (iii) : Remarquons tout d'abord que $\varphi \circ (c_\Sigma)^* = \varphi$. En effet, si L est un élément de $S(\Sigma_g)$, un relevé anti-holomorphe $c : (c_\Sigma)^*L \rightarrow L$ de c_Σ (voir par exemple [29]) nous donne un isomorphisme $\sigma \in H^0(\Sigma_g, (c_\Sigma)^*L) \mapsto c \circ \sigma \circ c_\Sigma \in H^0(\Sigma_g, L)$. Ceci implique que $\varphi \circ (c_\Sigma)^* = \varphi$ puisque si $L^2 = K_\Sigma$ alors $((c_\Sigma)^*L)^2 = K_\Sigma$. On en déduit que pour tout $\zeta \in Spin(\Sigma_g)$, on a $\varphi_{L_\zeta} \circ (c_\Sigma)_* = \varphi_{(c_\Sigma)^*L_\zeta}$. Ainsi, nous avons $q_\zeta \circ (c_\Sigma)_* = q_\zeta$ si et seulement si $(c_\Sigma)^*L_\zeta = L_\zeta$.

□

Remarque 3.2. — Lorsque $\mathbb{R}\Sigma_g \neq \emptyset$, la condition $(c_\Sigma)^*L = L$ pour un $L \in S(\Sigma_g)$ équivaut à l'existence d'une structure réelle anti-holomorphe relevant c_Σ sur L (voir par exemple [29]). Une telle structure n'est toutefois pas unique : deux relevés diffèrent d'un facteur complexe constant.

Lemme 3.5. — *L'ensemble $\mathbb{R}Spin(\Sigma_g)$ est un espace affine de direction $F = \text{Fix}((c_\Sigma)^*) \subset H^1(\Sigma_g, \mathbb{Z}/2\mathbb{Z})$.*

Démonstration. — En effet, si q et q' sont deux éléments de $\mathbb{R}Spin(\Sigma_g)$, alors $q - q'$ est un élément de $H^1(\Sigma_g, \mathbb{Z}/2\mathbb{Z})$ et $(q - q') \circ (c_\Sigma)_* = q - q'$. Réciproquement, si $q \in \mathbb{R}Spin(\Sigma_g)$ et $\alpha \in F$, alors $q + \alpha$ est un élément de $Spin(\Sigma_g)$ qui vérifie de plus $(c_\Sigma)^*(q + \alpha) = q + \alpha$. Donc $q + \alpha \in \mathbb{R}Spin(\Sigma_g)$. □

Remarque 3.3. — L'isomorphisme de dualité de Poincaré

$$\begin{array}{ccc} H_1(\Sigma_g, \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}) & \rightarrow & H^1(\Sigma_g, \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}) \\ a & \mapsto & a^\bullet \end{array}$$

commute avec $(c_\Sigma)_*$ et $(c_\Sigma)^*$, de sorte que F est le dual de Poincaré de $\text{Fix}((c_\Sigma)_*) \subset H_1(\Sigma_g, \mathbb{Z}/2\mathbb{Z})$. De plus, si l'on prend une base symplectique réelle (a_i, b_i) de $H_1(\Sigma_g, \mathbb{Z})$, elle induit une base de $H_1(\Sigma_g, \mathbb{Z}/2\mathbb{Z})$, et $\text{Fix}((c_\Sigma)_*)$ est le sous-espace engendré par $a_1, \dots, a_g, b_1, \dots, b_{k-1}$ lorsque la courbe n'est pas séparante, et par $a_1, \dots, a_{k-1}, a_k + a_{k+m}, \dots, a_{k+m-1} + a_g, b_1, \dots, b_{k-1}, b_k + b_{k+m}, \dots, b_{k+m-1} + b_g$ si la courbe est séparante. Dans les deux cas, nous notons que le $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ -espace vectoriel F est de dimension $g + k - 1$ et qu'il contient la réduction modulo 2 F^- de $H^1(\Sigma_g, \mathbb{Z})_{-1}$ comme sous-espace de dimension g .

3.1.3. Action de $[(\Sigma_g, c_\Sigma), (\mathbb{C}^*, conj)]$ sur $\mathbb{R}Spin(\Sigma_g)$. — Revenons maintenant aux automorphismes réels sur les fibrés en droites complexes munis d'une structure réelle. Notons F_+ la réduction modulo 2 de $H_1(\Sigma_g, \mathbb{Z})_{+1}$, de sorte que F_+ et F^- sont duaux de Poincaré. La réduction modulo 2 du morphisme d'indice

$$\begin{array}{ccc} \text{ind}_2 : [(\Sigma_g, c_\Sigma), (\mathbb{C}^*, conj)] & \rightarrow & H^1(\Sigma_g, \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}) = \text{Hom}(H_1(\Sigma_g, \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}), H_1(\mathbb{C}^*, \mathbb{Z}/2\mathbb{Z})) \\ f & \mapsto & f_* \end{array}$$

a pour image F^- d'après le Lemme 3.3 (voir la Remarque 3.3).

Remarque 3.4. — On peut même expliciter ce morphisme à l'aide d'une base (d_i) de F_+ que l'on complète en une base (d_i, e_i) symplectique de $H_1(\Sigma_g, \mathbb{Z}/2\mathbb{Z})$:

$$(f_*)^{\text{PD}} = \sum_i f_*(e_i) d_i.$$

D'autre part, les éléments de $[(\Sigma_g, c_\Sigma), (\mathbb{C}^*, \text{conj})]$ s'identifiant canoniquement aux classes d'homotopie des automorphismes réels du fibré tangent à Σ_g , ils agissent par tiré en arrière sur les structures Spin réelles sur Σ_g .

Lemme 3.6. — *L'action de $[(\Sigma_g, c_\Sigma), (\mathbb{C}^*, \text{conj})]$ sur $\mathbb{R}\text{Spin}(\Sigma_g)$ s'identifie à l'action par translation de F^- sur ce même espace grâce au morphisme ind_2 .*

Démonstration. — Prenons un élément f de $[(\Sigma_g, c_\Sigma), (\mathbb{C}^*, \text{conj})]$, un automorphisme $\Phi_f \in \mathbb{R}GL(T\Sigma_g)$ égal à f dans $[(\Sigma_g, c_\Sigma), (\mathbb{C}^*, \text{conj})]$ et une structure Spin q_ζ sur Σ_g . Soit $a \in H_1(\Sigma_g, \mathbb{Z}/2\mathbb{Z})$ une courbe simple sur Σ_g . Nous avons par définition

$$\begin{aligned} f \cdot q_\zeta(a) &= \langle (\Phi_f)^* \zeta, \tilde{a} \rangle \\ &= \langle \zeta, (\Phi_f)_*(\vec{a} + z) \rangle \end{aligned}$$

Or, l'action de $(\Phi_f)_*$ sur la classe de la fibre z est triviale, et en trivialisant $T\Sigma_g$ le long de a , on voit que l'action de $(\Phi_f)_*$ sur le champ de vecteur tangent à a est donnée par l'indice de f le long de a . Plus précisément, $(\Phi_f)_*(\vec{a}) = \vec{a} + f_*(a)z$. Ainsi

$$\begin{aligned} f \cdot q_\zeta(a) &= \langle \zeta, \vec{a} + f_*(a)z + z \rangle \\ &= q_\zeta(a) + f_*(a) \end{aligned}$$

car $\langle \zeta, z \rangle = 1$. □

Supposons que $\mathbb{R}\Sigma_g \neq \emptyset$ et notons

$$H_{g+1}^1(\mathbb{R}\Sigma_g, \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}) = \{w \in H^1(\mathbb{R}\Sigma_g, \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}) \mid w([\mathbb{R}\Sigma_g]) = g+1 \pmod{2}\},$$

et pour tout $w \in H_{g+1}^1(\mathbb{R}\Sigma_g, \mathbb{Z}/2\mathbb{Z})$,

$$\mathbb{R}\text{Spin}(\Sigma_g, w) := \{L \in \mathbb{R}\text{Spin}(\Sigma_g) \mid w_1(\mathbb{R}L) = w\}$$

On en déduit la partition

$$(*) \quad \mathbb{R}\text{Spin}(\Sigma_g) = \bigsqcup_{w \in H_{g+1}^1(\mathbb{R}\Sigma_g, \mathbb{Z}/2\mathbb{Z})} \mathbb{R}\text{Spin}(\Sigma_g, w).$$

Proposition 3.1. — *Supposons que $\mathbb{R}\Sigma_g \neq \emptyset$. La partition $(*)$ est la réunion des orbites de l'action de $[(\Sigma_g, c_\Sigma), (\mathbb{C}^*, \text{conj})]$ sur $\mathbb{R}\text{Spin}(\Sigma_g)$. En particulier, ce sont des espaces affines sur F^- . De plus, chaque orbite se réécrit*

$$\mathbb{R}\text{Spin}(\Sigma_g, w) = \{q \in \mathbb{R}\text{Spin}(\Sigma_g) \mid q|_{H_1(\mathbb{R}\Sigma_g, \mathbb{Z}/2\mathbb{Z})} = \mathbb{1} - w\}.$$

Avant de passer à la démonstration, donnons le Lemme 3.7 que l'on peut trouver chez Natanzon (Lemma 3.2 p.72 de [23]).

Lemme 3.7. — *Soit $q \in \mathbb{R}\text{Spin}(\Sigma_g)$ et a une courbe simple connexe sur Σ_g . Supposons que $\mathbb{R}\Sigma_g \neq \emptyset$.*

1. Si $c_\Sigma(a) = a$ et $a \cap \mathbb{R}\Sigma_g = \emptyset$ (c'est-à-dire que a est une courbe globalement stable par c_Σ) alors $q(a) = 1$.
2. Si $c_\Sigma(a) \cap a = \emptyset$ alors $q(a + c_\Sigma(a)) = 0$.

□

Démonstration de la Proposition 3.1. — Commençons par démontrer que pour $w \in H_{g+1}^1(\mathbb{R}\Sigma_g, \mathbb{Z}/2\mathbb{Z})$ nous avons l'égalité

$$\{L \in \mathbb{R}Spin(\Sigma_g) \mid w_1(\mathbb{R}L) = w\} = \{q \in \mathbb{R}Spin(\Sigma_g) \mid q|_{H_1(\mathbb{R}\Sigma_g, \mathbb{Z}/2\mathbb{Z})} = \mathbb{1} - w\}.$$

Prenons pour cela $\zeta \in \mathbb{R}Spin(\Sigma_g)$. Par définition

$$q_\zeta([\mathbb{R}\Sigma_g]_i) = \langle \zeta, \widetilde{[\mathbb{R}\Sigma_g]_i} \rangle,$$

ce qui signifie que $q_\zeta([\mathbb{R}\Sigma_g]_i)$ vaut 1 si et seulement si le lacet $\widetilde{[\mathbb{R}\Sigma_g]_i}$ dans R_Σ^+ ne se relève pas dans la structure $Spin$ donnée par ζ . Or, ceci est équivalent à l'existence d'une section de $(\mathbb{R}L_\zeta)_i$ ne s'annulant pas (voir [23]). Donc

$$q_\zeta|_{H_1(\mathbb{R}\Sigma_g, \mathbb{Z}/2\mathbb{Z})} = \mathbb{1} - w_1(\mathbb{R}L).$$

D'autre part, si f est un élément de $[(\Sigma_g, c_\Sigma), (\mathbb{C}^*, conj)]$ et $q \in \mathbb{R}Spin(\Sigma_g, w)$, alors grâce au Lemme 3.6

$$(f \cdot q)|_{H_1(\mathbb{R}\Sigma_g, \mathbb{Z}/2\mathbb{Z})} = q|_{H_1(\mathbb{R}\Sigma_g, \mathbb{Z}/2\mathbb{Z})} + f_*|_{H_1(\mathbb{R}\Sigma_g, \mathbb{Z}/2\mathbb{Z})} = \mathbb{1} - w$$

car f_* est un élément de F^- . Donc l'action de $[(\Sigma_g, c_\Sigma), (\mathbb{C}^*, conj)]$ préserve chacun des ensembles $\mathbb{R}Spin(\Sigma_g, w)$.

Puis, si $q, q' \in \mathbb{R}Spin(\Sigma_g, w)$, le Lemme 3.7 nous assure que $(q - q')|_{F_+} = 0$ et donc que $q - q'$ est un élément de F^- . Ainsi l'action de $[(\Sigma_g, c_\Sigma), (\mathbb{C}^*, conj)]$ est transitive sur $\mathbb{R}Spin(\Sigma_g, w)$. □

Définition 3.3. — Si ζ est un élément de $\mathbb{R}Spin(\Sigma_g, w)$, nous dirons que $w \in H^1(\mathbb{R}\Sigma_g, \mathbb{Z}/2\mathbb{Z})$ est la première classe de Stiefel-Whitney de la structure $Spin$ ζ , et nous écrirons $w_\zeta = w$.

Rappelons d'autre part (voir [16] par exemple) qu'étant donnée une structure $Spin$ q sur Σ_g , on définit son invariant d'Arf :

$$\text{Arf}(q) = \sum_i q(a_i)q(b_i) \in \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$$

pour (a_i, b_i) une base symplectique de $H_1(\Sigma_g, \mathbb{Z}/2\mathbb{Z})$. Cette expression ne dépend pas de la base symplectique choisie et détermine la classe de bordisme de (Σ_g, q) , élément de $\Omega_2^{Spin} \cong \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ (voir [17]).

Lemme 3.8. — Pour $f \in [(\Sigma_g, c_\Sigma), (\mathbb{C}^*, conj)]$ et $q \in \mathbb{R}Spin(\Sigma_g)$,

$$\text{Arf}(f \cdot q) = \text{Arf}(q) + q((f_*)^{\text{PD}}).$$

En particulier, si q' est une structure $Spin$ réelle de même classe de Stiefel-Whitney que q , alors,

$$\text{Arf}(f \cdot q) - \text{Arf}(q) = \text{Arf}(f \cdot q') - \text{Arf}(q').$$

Démonstration. — Prenons une base symplectique (a_i, b_i) de $H_1(\Sigma_g, \mathbb{Z}/2\mathbb{Z})$ comme dans la Remarque 3.4. Alors

$$\begin{aligned} \text{Arf}(f.q) &= \sum_i (q(a_i) + f_*(a_i))(q(b_i) + f_*(b_i)) \\ &= \sum_i q(a_i)q(b_i) + \sum_i q(a_i)f_*(b_i) + \sum_i q(b_i)f_*(a_i) + \sum_i f_*(a_i)f_*(b_i). \end{aligned}$$

Mais, comme f_* est un élément de F^- qui est le dual de Poincaré du lagrangien F_+ ,

$$\text{Arf}(f.q) = \text{Arf}(q) + \sum_i q(a_i)f_*(b_i)$$

et q étant linéaire sur ce même lagrangien, nous obtenons la première affirmation,

$$\text{Arf}(f.q) = \text{Arf}(q) + q\left(\sum_i f_*(b_i)a_i\right).$$

Puis, pour q, q' et f comme dans l'énoncé, il existe g dans $[(\Sigma_g, c_\Sigma), (\mathbb{C}^*, conj)]$ tel que $g.q = q'$ (Lemme 3.6 et Proposition 3.1). Donc $q'((f_*)^{\text{PD}}) = q((f_*)^{\text{PD}}) + g_*((f_*)^{\text{PD}})$. Mais comme $(f_*)^{\text{PD}}$ et $(g_*)^{\text{PD}}$ sont tous les deux dans le lagrangien F_+ , nous avons $g_*((f_*)^{\text{PD}}) = 0$, ce qui prouve la seconde assertion. \square

Le Lemme 3.8 assure que l'application

$$\begin{aligned} \mathcal{A} : (f, w) &\in [(\Sigma_g, c_\Sigma), (\mathbb{C}^*, conj)] \times H_{g+1}^1(\mathbb{R}\Sigma_g, \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}) \\ &\mapsto q((f_*)^{\text{PD}}) = \text{Arf}(f.q) - \text{Arf}(q) \in \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \end{aligned}$$

est bien définie indépendamment du choix de $q \in \mathbb{R}Spin(\Sigma_g, w)$. Cette application \mathcal{A} mesure l'action de $[(\Sigma_g, c_\Sigma), (\mathbb{C}^*, conj)]$ sur les classes de bordisme des structures $Spin$ réelles de Σ_g .

Lemme 3.9. — *Pour tout w dans $H_{g+1}^1(\mathbb{R}\Sigma_g, \mathbb{Z}/2\mathbb{Z})$, l'application $\mathcal{A}^w = \mathcal{A}(\cdot, w) : [(\Sigma_g, c_\Sigma), (\mathbb{C}^*, conj)] \rightarrow \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ est un morphisme.*

Démonstration. — Ce lemme résulte du fait que les formes quadratiques $q \in \mathbb{R}Spin(\Sigma_g)$ sont linéaires en restriction au lagrangien F_+ qui est le dual de Poincaré de F^- . \square

Définition 3.4. — *On dit que deux structures $Spin$ réelles ζ et ζ' sont bordantes si et seulement si elles ont même première classe de Stiefel-Whitney et si (Σ_g, ζ) et (Σ_g, ζ') sont bordantes.*

Les lemmes précédents montrent que le groupe $[(\Sigma_g, c_\Sigma), (\mathbb{C}^*, conj)]$ agit sur les classes de bordisme réelles sans changer leur première classe de Stiefel-Whitney et que cette action est donnée par l'application \mathcal{A} .

3.2. Action des automorphismes réels sur les orientations du fibré déterminant et structures $Spin$ réelles

3.2.1. Énoncés. — Nous pouvons maintenant rappeler l'énoncé suivant qui donne une interprétation topologique de l'action de $\mathbb{R}GL(N)$ sur les orientations de $\text{Det}(N)$ lorsque $\deg(N) = g + 1 \pmod{2}$.

Théorème 3.4. — Soit (N, c_N) un fibré vectoriel complexe de rang 1 muni d'une structure réelle sur (Σ_g, c_Σ) , de partie réelle non vide. Soit $f \in \mathbb{R}GL(N) = \mathbb{R}C^\infty(\Sigma_g, \mathbb{C}^*)$. Si le degré de N n'est pas de même parité que le genre de Σ_g , alors l'action de f sur les orientations du fibré $\text{Det}(N)$ coïncide avec l'action de f sur les classes de bordisme de structures $Spin$ réelles de (Σ_g, c_Σ) de même première classe de Stiefel-Whitney que $\mathbb{R}N$. Ainsi, f préserve les orientations de $\text{Det}(N)$ si et seulement si $\mathcal{A}(f, w_1(\mathbb{R}N)) = 0$.

Remarque 3.5. —

- Nous traitons le cas où $\deg(N) = g \pmod{2}$ dans le Théorème 3.5 mais notons dès maintenant que l'énoncé précédent n'est plus vrai dans ce cas. En effet, la fonction constante égale à -1 préserve toujours les classes de bordisme de structures $Spin$ réelles de Σ_g , mais son action sur les orientations du fibré $\text{Det}(N)$ n'est triviale que lorsque $\deg(N) + 1 - g = 0 \pmod{2}$.

Nous pouvons formuler cette remarque de façon différente. Soit \mathcal{N} une déformation réelle de fibrés en droites holomorphes sur (Σ_g, c_Σ) au-dessus d'une base (B, c_B) . C'est-à-dire que pour b dans B (resp. dans $\mathbb{R}B$), \mathcal{N}_b est un fibré en droites holomorphe (resp. réel) sur Σ_g , et \mathcal{N} est un fibré en droites holomorphe réel sur $B \times \Sigma_g$. Notons $\pi : B \times \Sigma_g \rightarrow B$. Alors le groupe de Picard réel $\mathbb{R}\text{Pic}(B)$ agit sur \mathcal{N} par $L \in \mathbb{R}\text{Pic}(B) \mapsto \pi^*L \otimes \mathcal{N}$. Fibre à fibre, cette action ne change pas \mathcal{N}_b . Par contre la déformation globale n'est plus la même.

En prenant en particulier $B = \mathbb{C}P^1$, $L = \mathcal{O}_{\mathbb{C}P^1}(1)$ et $\deg(\mathcal{N}_b) = g \pmod{2}$, cette action change l'orientabilité du fibré déterminant $\text{Det}(\mathcal{N})$ au-dessus de $\mathbb{R}B = \mathbb{R}P^1$.

- Dans le cas particulier où la courbe est de genre zéro, le Lemme 3.3 nous dit qu'il n'y a essentiellement que deux automorphismes de fibrés en droites holomorphes réels sur la sphère au-dessus de l'identité : l'identité et la multiplication par -1 . Pour la sphère, nous n'avons donc pas besoin de structures $Spin$ réelles. Un automorphisme n'échangera les orientations du fibré déterminant que s'il est négatif sur l'équateur et si le degré du fibré est pair.

Comme le suggère la Remarque 3.5, nous devons prendre en compte le signe des éléments de $\mathbb{R}GL(N)$ sur la partie réelle de Σ_g de façon plus précise pour obtenir un résultat plus général. C'est ce que nous faisons maintenant.

Tout élément f de $[(\Sigma_g, c_\Sigma), (\mathbb{C}^*, \text{conj})]$ induit un morphisme de calcul de signe

$$\epsilon_f : H_0(\mathbb{R}\Sigma_g, \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}) \rightarrow \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$$

de la façon suivante. Le quotient $\frac{f}{|f|}$ restreint à chaque composante de $\mathbb{R}\Sigma_g$ est un élément de $\{-1, 1\}$. La fonction

$$\frac{f}{|f|} : \mathbb{R}\Sigma_g \rightarrow \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$$

est donc localement constante. Elle définit donc un morphisme de $H_0(\mathbb{R}\Sigma_g, \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}) \rightarrow (\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^k$ que l'on compose avec le morphisme d'augmentation $(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^k \rightarrow \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ pour obtenir ϵ_f .

Remarque 3.6. — Si nous choisissons une base symplectique réelle (a_i, b_i) de $H_1(\Sigma_g, \mathbb{Z})$, alors les morphismes $f_* \in F^-$ et ϵ_f sont reliés par

$$\epsilon_f([\mathbb{R}\Sigma_g]_i^{\text{PD}}) = f_*(b_i) + \epsilon_f([\mathbb{R}\Sigma_g]_0^{\text{PD}}).$$

Posons

$$\begin{aligned} \beta_0(f) : H^1(\mathbb{R}\Sigma_g, \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}) &\rightarrow \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \\ w &\mapsto \epsilon_f(1 - w^{\text{PD}}). \end{aligned}$$

Cette application mesure l'action de f sur les orientations de la droite réelle

$$\bigotimes_{w_1(\mathbb{R}L)([\mathbb{R}\Sigma_g]_i)=0} (\mathbb{R}L)_{x_i} \quad \text{pour tout } L \in \mathbb{R}Spin(\Sigma_g, w) \text{ et } x_i \in (\mathbb{R}\Sigma_g)_i.$$

Lemme 3.10. — *Pout tout f élément de $[(\Sigma_g, c_\Sigma), (\mathbb{C}^*, \text{conj})]$, les applications $\beta_0(f)$ et $\mathcal{A}(f)$ sont deux formes affines de même direction.*

Démonstration. — Soient w et w' deux éléments de $H_{g+1}^1(\mathbb{R}\Sigma_g, \mathbb{Z}/2\mathbb{Z})$, $q \in \mathbb{R}Spin(\Sigma_g, w)$ et $q' \in \mathbb{R}Spin(\Sigma_g, w')$. Prenons une base symplectique réelle (a_i, b_i) de $H_1(\Sigma_g, \mathbb{Z})$. Elle induit une base $c_1 = a_1, \dots, c_{k-1} = a_{k-1}, c_k = a_k + a_{k+m}, \dots, c_{k+m-1} = a_{k+m-1} + a_g, c_{k+m} = b_k - b_{k+m}, \dots, c_g = b_{k+m-1} - b_g$ (resp. $c_1 = a_1, \dots, c_g = a_g$) de $H_1(\Sigma_g, \mathbb{Z})_{+1}$ lorsque la courbe est séparante (resp. non séparante). On complète cette dernière en une nouvelle base symplectique de $H_1(\Sigma_g, \mathbb{Z})$ en posant $d_1 = b_1, \dots, d_{k-1} = b_{k-1}, d_k = b_k, \dots, d_{k+m-1} = b_{k+m-1}, d_{k+m} = a_k, \dots, d_g = a_{k+m-1}$ (resp. $d_1 = b_1, \dots, d_g = b_g$). On a

$$(f_*)^{\text{PD}} = \sum_{i=1}^g f_*(d_i)c_i.$$

D'après le Lemme 3.7, nous avons $q(c_i) = q'(c_i)$ pour $i \geq k$. Ainsi,

$$\begin{aligned} \mathcal{A}(f)(w) - \mathcal{A}(f)(w') &= (q - q') \left(\sum_{i=1}^g f_*(d_i)c_i \right) \\ &= (q - q') \left(\sum_{i=1}^{k-1} f_*(b_i)[\mathbb{R}\Sigma_g]_i \right) \\ &= \sum_{i=1}^{k-1} f_*(b_i)(w - w')([\mathbb{R}\Sigma_g]_i) \\ &= \sum_{i=1}^{k-1} (\epsilon_f([\mathbb{R}\Sigma_g]_i^{\text{PD}}) - \epsilon_f([\mathbb{R}\Sigma_g]_0^{\text{PD}}))(w - w')([\mathbb{R}\Sigma_g]_i) \end{aligned}$$

d'après la Remarque 3.6. Puisque $\sum_{i=1}^{k-1} (w - w')([\mathbb{R}\Sigma_g]_i) = (w - w')([\mathbb{R}\Sigma_g]_0)$, on a

$$\begin{aligned} \mathcal{A}(f)(w) - \mathcal{A}(f)(w') &= \epsilon_f \left(\sum_{i=1}^{k-1} (w - w')([\mathbb{R}\Sigma_g]_i) [\mathbb{R}\Sigma_g]_i^{\text{PD}} \right) \\ &\quad - \epsilon_f \left(\left(\sum_{i=1}^{k-1} (w - w')([\mathbb{R}\Sigma_g]_i) \right) [\mathbb{R}\Sigma_g]_0^{\text{PD}} \right) \\ &= \epsilon_f \left(\sum_{i=0}^{k-1} (w - w')([\mathbb{R}\Sigma_g]_i) [\mathbb{R}\Sigma_g]_i^{\text{PD}} \right) \\ &= \epsilon_f (w - w')^{\text{PD}}. \end{aligned}$$

Ainsi

$$\mathcal{A}(f)(w) - \mathcal{A}(f)(w') = \beta_0(f)(w) - \beta_0(f)(w').$$

□

Autrement dit, un élément $f \in [(\Sigma_g, c_\Sigma), (\mathbb{C}^*, \text{conj})]$ agit de la même façon sur les classes de bordisme de structures *Spin* réelles de première classe de Stiefel-Whitney w et sur les orientations de $\bigotimes_{w_1(\mathbb{R}L)([\mathbb{R}\Sigma_g]_i)=0} (\mathbb{R}L)_{x_i}$ pour tout $L \in \mathbb{R}Spin(\Sigma_g, w)$ et $x_i \in (\mathbb{R}\Sigma_g)_i$, à une constante (ne dépendant pas de w) près. C'est cette constante $s_{\text{top}}(f)$ qui nous intéresse.

Définition 3.5. — — Pour f dans $[(\Sigma_g, c_\Sigma), (\mathbb{C}^*, \text{conj})]$ et $w \in H_{g+1}^1(\mathbb{R}\Sigma_g, \mathbb{Z}/2\mathbb{Z})$, on pose $s_{\text{top}}(f) := \beta_0(f)(w) + \mathcal{A}(f, w) \in \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$.
— Étant donné $(N, c_N) \rightarrow (\Sigma_g, c_\Sigma)$ un fibré en droites complexes muni d'une structure réelle, et $f \in \mathbb{R}GL(N)$, on pose

$$s_N(f) := s_{\text{top}}(f) + \beta_0(f)(w_1(\mathbb{R}N)) \in \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}.$$

Exemple 3.2. — Calculons la valeur de s_{top} sur la famille \mathcal{B} . Fixons pour cela $q \in \mathbb{R}Spin(\Sigma_g, w)$.

- Pour $i = 0, \dots, k-1$, d'une part $\mathcal{A}(f_i, w) = q([\mathbb{R}\Sigma_g]_i) = 1 - w([\mathbb{R}\Sigma_g]_i)$, et d'autre part, comme f_i n'est négative que sur la composante $(\mathbb{R}\Sigma_g)_i$ de $\mathbb{R}\Sigma_g$, $\beta_0(f)(w) = 1 - w([\mathbb{R}\Sigma_g]_i)$. Nous avons donc dans ce cas $s_{\text{top}}(f_i) = 0$.
- Si (Σ_g, c_Σ) n'est pas séparante et $i \in \{k, \dots, g\}$, d'une part $\mathcal{A}(f_i, w) = q(a_i) = 1$ car a_i est globalement stable (voir Lemme 3.7), d'autre part $\beta_0(f)(w) = 0$ car f_i est positive sur $\mathbb{R}\Sigma_g$. Nous avons donc $s_{\text{top}}(f_i) = 1$ dans ce cas.
- Si (Σ_g, c_Σ) est séparante et $i \in \{k, \dots, k+m-1\}$, d'une part $\mathcal{A}(f_i, w) = q(a_i + c_\Sigma(a_i)) = 0$ et $\mathcal{A}(g_i, w) = q(b_i + c_\Sigma(b_i)) = 0$ d'après le Lemme 3.4, d'autre part f_i est positive sur $\mathbb{R}\Sigma_g$ donc $\beta_0(f_i) = 0$. Nous avons donc dans ce cas $s_{\text{top}}(f_i) = s_{\text{top}}(g_i) = 0$.

Remarque 3.7. —

- Lorsque $\deg(N) = g+1 \pmod{2}$, nous pouvons prendre $w_1(\mathbb{R}N) \in H_{g+1}^1(\mathbb{R}\Sigma_g, \mathbb{Z}/2\mathbb{Z})$ pour calculer s_{top} . Nous avons alors dans ce cas $s_N = \mathcal{A}^{w_1(\mathbb{R}N)}$.

- Comme $-1 = \prod_{i=0}^{k-1} f_i \in [(\Sigma_g, c_\Sigma), (\mathbb{C}^*, \text{conj})]$ (resp. $-1 = \prod_{i=0}^g f_i \in [(\Sigma_g, c_\Sigma), (\mathbb{C}^*, \text{conj})]$) lorsque la courbe est séparante (resp. non séparante), il suit de l'exemple 3.2 que $s_{top}(-1) = 0$ (resp. $s_{top}(-1) = g - k + 1 \pmod{2}$). D'après le Lemme 3.3, si $g - k + 1 = 0 \pmod{2}$, s_{top} passe au quotient en un morphisme de F^- à valeurs dans $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$. Il en est de même pour s_N si $\deg(N) = g + 1 \pmod{2}$.
- Lorsque la courbe est séparante, l'Exemple 3.2 et le Lemme 3.3 nous montrent que le morphisme s_{top} est nul (comparer avec [12]). Ainsi, dans ce cas, le signe $s_N(f)$ se calcule simplement en regardant le signe de f sur les composantes de $\mathbb{R}\Sigma_g$ où $\mathbb{R}N$ est orientable et en en faisant le produit.

Dans le cas général, si nous choisissons une composante connexe particulière $(\mathbb{R}\Sigma_g)_0$ de $\mathbb{R}\Sigma_g$, la Remarque 3.1 nous permet de définir s_{top} sur le produit $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \times F^-$. Si nous prenons une autre composante $(\mathbb{R}\Sigma_g)_i$, alors le morphisme obtenu se déduit du précédent en le composant à droite par l'isomorphisme donné dans la Remarque 3.1.

Nous pouvons maintenant énoncer un résultat en tout degré.

Théorème 3.5. — *Soit (N, c_N) un fibré en droites complexes sur (Σ_g, c_Σ) de partie réelle non vide et $f \in \mathbb{R}GL(N)$. Alors l'automorphisme f préserve les orientations du fibré $\text{Det}(N)$ si et seulement si $s_N(f) = 0$.*

Corollaire 3.1. — *Si f est positive sur $\mathbb{R}\Sigma_g$ et préserve une structure Spin réelle de Σ_g , alors f préserve les orientations de $\text{Det}(N)$.*

Si (Σ_g, c_Σ) est séparante, alors f préserve les orientations de $\text{Det}(N)$ si et seulement si f échange les orientations d'un nombre pair de composantes orientables de $\mathbb{R}N$.

Démonstration. — Ceci suit du Théorème 3.5, du Lemme 3.10 et de la Remarque 3.7. □

Le Théorème 3.4 est un cas particulier du Théorème 3.5 grâce à la Remarque 3.7. Remarquons aussi que le signe s_N se décompose en une partie « purement topologique » ne dépendant pas du fibré N et une contribution de la partie réelle de N .

Pour démontrer le Théorème 3.5 nous commençons par étudier le cas où N est de degré 0 en décrivant explicitement l'action des automorphismes sur les conoyaux des opérateurs de Cauchy-Riemann réels sur N . Dans un deuxième temps, nous réduisons le cas général au cas du degré 0.

3.2.2. Conoyaux d'opérateurs de Cauchy-Riemann réels. — L'objet de cette section est de décrire le conoyau réel d'un opérateur de Cauchy-Riemann sur le fibré en droites complexes trivial $(\mathbb{C}, \text{conj}) \rightarrow (\Sigma_g, c_\Sigma)$. Nous supposons de plus que g est non nul.

Pour une structure complexe J sur Σ_g qui rend c_Σ anti-holomorphe, nous notons $\bar{\partial}_J$ l'opérateur de Cauchy-Riemann réel $\frac{1}{2}(d + i \circ d \circ J)$ sur le fibré en droites

complexes trivial. Dans le cas où (Σ_g, c_Σ) est séparante, nous aurons aussi besoin d'une fonction $u : \Sigma_g \rightarrow \mathbb{C}$, $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ -équivariante, valant 0 au voisinage de $\mathbb{R}\Sigma_g$, i sur une hémisphère et $-i$ sur l'autre. Cette fonction n'est pas unique, nous faisons donc un choix. Nous choisissons aussi une base symplectique réelle (a_i, b_i) de $H_1(\Sigma_g, \mathbb{Z})$. Remarquons qu'elle induit une orientation sur chaque composante de $\mathbb{R}\Sigma_g$. D'autre part, les fonctions de la famille \mathcal{B} construites au §3.1.1 et que l'on utilise ici ne sont pas (généralement) à prendre à isotopie près, mais sont bien des représentants précis et choisis de leurs classes. En effet, si $\bar{\partial}$ est un opérateur de Cauchy-Riemann réel sur $(\mathbb{C}, conj)$, alors nous utiliserons le morphisme

$$\begin{aligned} \mathbb{R}\mathcal{C}^\infty(\Sigma_g, \mathbb{C}^*) &\rightarrow H_{\bar{\partial}}^1(\Sigma_g, \mathbb{C})_{+1} \\ f &\mapsto \frac{\bar{\partial}(f)}{f}. \end{aligned}$$

Lorsque $\bar{\partial} = \bar{\partial}_J$, une fonction $f \in \mathbb{R}\mathcal{C}^\infty(\Sigma_g, \mathbb{C}^*)$ admettant un logarithme $g \in \mathbb{R}\mathcal{C}^\infty(\Sigma_g, \mathbb{C})$ s'envoie sur $\bar{\partial}_J(g) = 0 \in H_{\bar{\partial}_J}^1(\Sigma_g, \mathbb{C})_{+1}$ par ce morphisme. Cette application est donc bien définie sur $[(\Sigma_g, c_\Sigma), (\mathbb{C}^*, conj)]$ lorsque $\bar{\partial} = \bar{\partial}_J$. Ce n'est toutefois plus le cas lorsque $\bar{\partial} \neq \bar{\partial}_J$. En effet, un opérateur $\bar{\partial}$ sur le fibré trivial s'écrit $\bar{\partial}_J + \alpha$, avec $\alpha \in \Gamma(\Sigma_g, \Lambda_J^{0,1}\Sigma_g)_{+1}$, et pour $g \in \mathbb{R}\mathcal{C}^\infty(\Sigma_g, \mathbb{C})$,

$$\frac{\bar{\partial}(\exp(g))}{\exp(g)} = \bar{\partial}_J(g) + \alpha$$

ce qui n'est pas en général dans l'image de $\bar{\partial}$.

Lemme 3.11. — Si (Σ_g, c_Σ) n'est pas séparante : une base de $H_{\bar{\partial}_J}^1(\Sigma_g, \mathbb{C})_{+1}$

est donnée par les formes $\frac{\bar{\partial}_J(f_1)}{f_1}, \dots, \frac{\bar{\partial}_J(f_g)}{f_g}$.

Si (Σ_g, c_Σ) est séparante : une base de $H_{\bar{\partial}_J}^1(\Sigma_g, \mathbb{C})_{+1}$ est donnée par les formes

$\frac{\bar{\partial}_J(f_1)}{f_1}, \dots, \frac{\bar{\partial}_J(f_{k-1})}{f_{k-1}}, \frac{\bar{\partial}_J(f_k)}{f_k}, u \frac{\bar{\partial}_J(f_k)}{f_k}, \dots, \frac{\bar{\partial}_J(f_{k+m-1})}{f_{k+m-1}}, u \frac{\bar{\partial}_J(f_{k+m-1})}{f_{k+m-1}}$ ou encore $\frac{\bar{\partial}_J(f_1)}{f_1}, \dots, \frac{\bar{\partial}_J(f_{k-1})}{f_{k-1}}, \frac{\bar{\partial}_J(g_k)}{g_k}, u \frac{\bar{\partial}_J(g_k)}{g_k}, \dots, \frac{\bar{\partial}_J(g_{k+m-1})}{g_{k+m-1}}, u \frac{\bar{\partial}_J(g_{k+m-1})}{g_{k+m-1}}$.

Démonstration. — Soit $(\omega_1, \dots, \omega_g)$ une base de $H_{\bar{\partial}_J}^0(\Sigma_g, K_\Sigma)$ vérifiant

$$\int_{a_l} \omega_j = \frac{1}{2i\pi} \delta_{j,l}.$$

Nous différencions les deux cas :

Si (Σ_g, c_Σ) n'est pas séparante : Posons $\omega'_j = \frac{\omega_j - \overline{c_\Sigma^* \omega_j}}{2}$; cette nouvelle famille forme une base de $H_{\bar{\partial}_J}^0(\Sigma_g, K_\Sigma)_{-1}$. D'autre part, en reprenant les notations du §3.1.1, on remarque que pour tout $l \in \{1, \dots, g\}$, $f_{l|A_l}$ admet un logarithme

$\log(f_{l|A_l})$ valant $i\pi$ sur a_l . On a alors

$$\begin{aligned} \int_{\Sigma} \frac{\bar{\partial}_J(f_l)}{f_l} \wedge \omega'_j &= \int_{A_l} \frac{\bar{\partial}_J(f_l)}{f_l} \wedge \omega'_j \\ &= \int_{A_l} d(\log(f_{l|A_l})\omega'_j) \\ &= \int_{\partial(A_l)} \log(f_{l|A_l})\omega'_j \\ &= 2i\pi \int_{a_l} \omega'_j \\ &= \delta_{j,l}. \end{aligned}$$

Si (Σ_g, c_{Σ}) est séparante : Posons $\omega'_j = \frac{\omega_j - c_{\Sigma}^* \omega_j}{2}$ pour $j = 1, \dots, k+m-1$ et $\omega''_j = \frac{\omega_j + c_{\Sigma}^* \omega_j}{2i}$ pour $j = k, \dots, k+m-1$; de même, cette famille forme une base de $H_{\bar{\partial}_J}^0(\Sigma_g, K_{\Sigma})_{-1}$. Dans ce cas nous avons

$$\begin{aligned} \int \frac{\bar{\partial}_J(f_l)}{f_l} \wedge \omega'_j &= \delta_{j,l}, \text{ pour } j, l = 1, \dots, k+m-1 \\ \int u \frac{\bar{\partial}_J(f_l)}{f_l} \wedge \omega''_j &= \delta_{j,l}, \text{ pour } j, l = k, \dots, k+m-1. \end{aligned}$$

Faisons le calcul dans le second cas, et fixons $j, l \in \{k, \dots, k+m-1\}$. De même que précédemment, $f_{l|A_l}$ admet un logarithme $\log(f_{l|A_l})$ valant $i\pi$ sur a_l , et on a

$$\begin{aligned} \int_{\Sigma} u \frac{\bar{\partial}_J(f_l)}{f_l} \wedge \omega''_j &= \int_{A_l} i \frac{\bar{\partial}_J(f_l)}{f_l} \wedge \omega''_j + \int_{A_{l+m}} \frac{-i \bar{\partial}_J(f_l)}{f_l} \wedge \omega''_j \\ &= \int_{A_l} i \frac{\bar{\partial}_J(f_l)}{f_l} \wedge \omega''_j + \int_{A_{l+m}} -c_{\Sigma}^* \left(i \frac{\bar{\partial}_J(f_l)}{f_l} \wedge \omega''_j \right) \\ &= 2\Re \left(\int_{A_l} i \frac{\bar{\partial}_J(f_l)}{f_l} \wedge \omega''_j \right) \\ &= 2\Re \left(i \int_{A_l} d(\ln(f_{l|A_l})\omega''_j) \right) \\ &= 2\Re \left(i \int_{\partial(A_l)} \ln(f_{l|A_l})\omega''_j \right) \\ &= -4\pi \Re \left(\int_{a_l} \omega''_j \right) \\ &= 2\pi \Re \left(i \int_{a_l} \omega_j - i \int_{a_{l+m}} \omega_j \right) \\ &= \delta_{j,l}. \end{aligned}$$

La dualité de Serre (voir [30]) nous fournit alors le résultat. \square

Nous allons maintenant rayonner dans $\mathbb{RC}_J(\mathbb{C})$ à partir de l'opérateur $\bar{\partial}_J$ en partant dans les directions fournies par l'action des automorphismes construits au §3.1.1 sur cet opérateur. Posons pour $f \in \mathbb{RC}^{\infty}(\Sigma_g, \mathbb{C}^*)$

$$\bar{\partial}_{J,f}^t = \bar{\partial}_J + t \frac{\bar{\partial}_J(f)}{f}.$$

On remarque que d'après le Lemme 3.11, si $\text{ind}(f) \neq 0$, alors le fibré holomorphe $(\mathbb{C}, \bar{\partial}_{J,f}^t)$ est isomorphe au fibré trivial si et seulement si t est entier. En effet, si

$g \in \mathbb{R}GL(\mathbb{C})$ est un tel isomorphisme, alors nous avons

$$(*) \quad \bar{\partial}_J + t \frac{\bar{\partial}_J(f)}{f} = g^* \bar{\partial}_J = \bar{\partial}_J + \frac{\bar{\partial}_J(g)}{g}.$$

Si l'on décompose f et g grâce à la famille \mathcal{B} , $\frac{\bar{\partial}_J(f)}{f}$ et $\frac{\bar{\partial}_J(g)}{g}$ s'écrivent comme combinaisons linéaires à coefficients entiers, donnés par les indices de f et g , des formes apparaissant dans le Lemme 3.11. L'égalité $(*)$ impose donc que t doit être entier.

En particulier, lorsque t n'est pas entier, le noyau de l'opérateur $\bar{\partial}_{J,f}^t$ est nul, et son conoyau est de dimension $g - 1$. Plus précisément, nous avons le résultat suivant.

Proposition 3.2. — *Soit (Σ_g, c_Σ) une surface de Riemann réelle de genre g non nul et de structure complexe fixée $J \in \mathbb{R}J(\Sigma_g)$. Si t est un réel non entier, alors :*

Si (Σ_g, c_Σ) n'est pas séparante : pour tout $l \in \{1, \dots, g\}$, une base de $H_{\bar{\partial}_{J,f_l}}^1(\Sigma_g, \mathbb{C})_{+1}$ est donnée par les formes

$$\alpha_1 = \frac{\bar{\partial}_J(f_1)}{f_1}, \dots, \frac{\widehat{\bar{\partial}_J(f_l)}}{f_l}, \dots, \alpha_g = \frac{\bar{\partial}_J(f_g)}{f_g}.$$

Si (Σ_g, c_Σ) est séparante : une base de $H_{\bar{\partial}_{J,f_l}}^1(\Sigma_g, \mathbb{C})_{+1}$ est donnée par les formes

$$\begin{aligned} \alpha_1 &= \frac{\bar{\partial}_J(f_1)}{f_1}, \dots, \frac{\widehat{\bar{\partial}_J(f_l)}}{f_l}, \dots, \alpha_{k-1} = \frac{\bar{\partial}_J(f_{k-1})}{f_{k-1}}, \alpha_k = \frac{\bar{\partial}_J(f_k)}{f_k}, \\ \alpha_{k+m} &= u \frac{\bar{\partial}_J(f_k)}{f_k}, \dots, \alpha_{g-m} = \frac{\bar{\partial}_J(f_{g-m})}{f_{g-m}}, \alpha_g = u \frac{\bar{\partial}_J(f_{g-m})}{f_{g-m}} \text{ si } 1 \leq l \leq k-1, \\ \text{ou par les formes } \alpha_1 &= \frac{\bar{\partial}_J(f_1)}{f_1}, \dots, \frac{\widehat{\bar{\partial}_J(f_l)}}{f_l}, u \frac{\widehat{\bar{\partial}_J(f_l)}}{f_l}, \dots, \alpha_{g-m} = \frac{\bar{\partial}_J(f_{g-m})}{f_{g-m}}, \alpha_g = \\ &u \frac{\bar{\partial}_J(f_{g-m})}{f_{g-m}}, \alpha_{l+m} = \bar{\partial}_J(u) \text{ si } k \leq l \leq k+m-1 = g-m. \end{aligned}$$

De même, une base de $H_{\bar{\partial}_{J,g_l}}^1(\Sigma_g, \mathbb{C})_{+1}$ est donnée par les formes

$$\begin{aligned} \alpha_1 &= \frac{\bar{\partial}_J(f_1)}{f_1}, \dots, \frac{\widehat{\bar{\partial}_J(g_l)}}{g_l}, u \frac{\widehat{\bar{\partial}_J(g_l)}}{g_l}, \dots, \alpha_{g-m} = \frac{\bar{\partial}_J(g_{g-m})}{g_{g-m}}, \alpha_g = u \frac{\bar{\partial}_J(g_{g-m})}{g_{g-m}}, \\ \alpha_{l+m} &= \bar{\partial}_J(u) \text{ pour } l = k, \dots, k+m-1 = g-m. \end{aligned}$$

Nous commençons par un résultat intermédiaire. Prenons $f = f_l$, $l \in \{1, \dots, g\}$, une des fonctions de la famille \mathcal{B} , et soit $\underline{\lambda} = (\lambda_1, \dots, \hat{\lambda}_l, \dots, \lambda_g)$ un $(g-1)$ -uplet de réels (g est non nul). Posons

$$\begin{aligned} F_{f,\underline{\lambda}} : \mathbb{R}J(\Sigma_g) \times \mathbb{R} \setminus \mathbb{Z} \times L^{1,p}(\Sigma_g, \mathbb{C})_{+1} &\rightarrow \mathcal{E}_{+1}^p \\ (J, t, v) &\mapsto \bar{\partial}_{J,f}^t v - \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq l}}^g \lambda_j \alpha_j. \end{aligned}$$

où $p > 2$ et \mathcal{E}_{+1}^p est le fibré sur $\mathbb{R}J(\Sigma_g)$ de fibre au-dessus de J les $(0,1)$ -formes pour J à valeurs complexes $L^p(\Sigma_g, \Lambda_J^{0,1} \Sigma_g)_{+1}$. Considérons $\mathcal{M}_{f,\underline{\lambda}} = F_{f,\underline{\lambda}}^{-1}(\{0\})$. Notons $\pi_{f,\underline{\lambda}} : \mathcal{M}_{f,\underline{\lambda}} \rightarrow \mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}$ la projection sur le second facteur.

Lemme 3.12. — Soit (Σ_g, c_Σ) une surface compacte réelle orientée de genre g non nul. Supposons que $\underline{\lambda}$ n'est pas nul. Alors :

1. $\mathcal{M}_{f,\underline{\lambda}}$ est une sous-variété de $\mathbb{R}J(\Sigma_g) \times \mathbb{R} \setminus \mathbb{Z} \times L^{1,p}(\Sigma_g, \mathbb{C})_{+1}$. Plus précisément, 0 est une valeur régulière de $F_{f,\underline{\lambda}}$.
2. La différentielle $d\pi_{f,\underline{\lambda}}$ est surjective en tout point de $\mathcal{M}_{f,\underline{\lambda}}$.

Démonstration. — Supposons que $\mathcal{M}_{f,\underline{\lambda}}$ est non vide. Nous montrons en fait un résultat qui implique directement les deux points du Lemme. Fixons $(J, t, v) \in \mathcal{M}_{f,\underline{\lambda}}$, et montrons que

$$\begin{aligned} d_{(J,t,v)}F_{f,\underline{\lambda}}(\cdot, 0, \cdot) : (\dot{J}, w) \in T_J\mathbb{R}J(\Sigma_g) \times L^{1,p}(\Sigma_g, \mathbb{C})_{+1} \\ \mapsto \bar{\partial}_{J,f}^t w + \frac{1}{2}(i \circ dv \circ \dot{J} + t \frac{v}{f} i \circ df \circ \dot{J}) - \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq l}}^g \lambda_j \dot{\alpha}_j(\dot{J}) \in L^p(\Sigma_g, \Lambda_J^{0,1}\Sigma_g)_{+1} \end{aligned}$$

est surjective. Ici, $\dot{\alpha}_j(\dot{J})$ désigne $\frac{1}{2}(\frac{1}{f_j} i \circ df_j \circ \dot{J})$, $\frac{1}{2}(\frac{u}{f_j} i \circ df_j \circ \dot{J})$, ou $\frac{1}{2}(i \circ du \circ \dot{J})$ selon que α_j vaut $\frac{\bar{\partial}_J(f_j)}{f_j}$, $u \frac{\bar{\partial}_J(f_j)}{f_j}$ ou $\bar{\partial}_J(u)$.

Déjà, l'image de $d_{(J,t,v)}F_{f,\underline{\lambda}}(\cdot, 0, \cdot)$ est fermée et son conoyau est de dimension finie, car l'opérateur $\bar{\partial}_{J,f}^t$ est Fredholm. Supposons que $d_{(J,t,v)}F_{f,\underline{\lambda}}(\cdot, 0, \cdot)$ n'est pas surjective et prenons donc $\omega \in L^{p'}(\Sigma_g, K_\Sigma)$ non nulle telle que pour tout $(\dot{J}, w) \in T_J\mathbb{R}J(\Sigma_g) \times L^{1,p}(\Sigma_g, \mathbb{C})_{+1}$

$$(*) \quad \int_{\Sigma} \omega \wedge d_{(J,t,v)}F_{f,\underline{\lambda}}(\dot{J}, 0, w) = 0.$$

En particulier, en prenant $\dot{J} = 0$, nous avons pour tout $w \in L^{1,p}(\Sigma_g, \mathbb{C})_{+1}$

$$\int_{\Sigma} \omega \wedge \bar{\partial}_{J,f}^t w = 0.$$

D'après le Théorème C.2.3 de [21], $\omega \in L^{1,p}(\Sigma_g, K_\Sigma)$ et vérifie $\bar{\partial}_J \omega + t \omega \wedge \frac{\bar{\partial}_J(f)}{f} = 0$.

Par régularité elliptique et d'après le Lemme de prolongement unique (voir [15], [14] ou [4] par exemple), ω est lisse et ne s'annule qu'en un nombre fini de points.

Supposons dans un premier temps que nous ne sommes pas dans le cas où la courbe est séparante et $l \geq k$ et $\lambda_{l+m} \neq 0$. Montrons qu'il existe un ouvert U

non vide de $\Sigma_g \setminus \bigcup_{j=1}^g A_j$, invariant par c_Σ , et sur lequel ω et dv sont non nulles.

Comme le lieu des zéros de dv est fermé, l'existence de U est équivalente au fait que dv ne soit pas partout nulle sur $\Sigma_g \setminus \bigcup_{j=1}^g A_j$. Nous raisonnons par l'absurde et

supposons donc que v est localement constante sur $\Sigma_g \setminus \bigcup_{j=1}^g A_j$. Comme $\Sigma_g \setminus \bigcup_{j=1}^g A_j$

est connexe, v y est constante. Par hypothèse, il existe $n \in \{1 \dots, g\} \setminus \{l\}$ tel que $\lambda_n \neq 0$. Nous distinguons plusieurs cas.

- Supposons tout d'abord que la courbe n'est pas séparante. Découpons alors Σ_g le long d'une courbe homologue à 0 de sorte à obtenir un tore privé d'un disque sur lequel seule la fonction f_n varie. En recollant un disque pour obtenir un tore T (voir Figure 3) nous pouvons y prolonger v et f_n , et nous avons alors l'équation

$$\bar{\partial}_{J_T} v = \lambda_n \frac{\bar{\partial}_{J_T} f_n}{f_n}$$

sur le tore T . Or, d'après le Lemme 3.11, ceci n'est pas possible, et nous obtenons une contradiction.

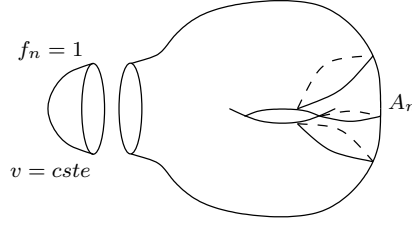


FIGURE 3. Le tore T découpé

- Si la courbe est séparante et $n < k$, nous pouvons utiliser le même raisonnement.
- Supposons enfin que la courbe est séparante, que $n \geq k$ et que si $l \geq k$ alors $l + m \neq n$. Découpons alors Σ_g le long de deux courbes complexes conjuguées et homologues l'une de l'autre de sorte à obtenir une surface de genre deux privée de deux disques sur laquelle seule la fonction f_n (resp. f_{n-m}) varie si $n \leq g - m$ (resp. si $n > g - m$). En recollant deux disques pour obtenir une surface de genre deux Σ' (voir Figure 4) nous pouvons y prolonger v , u et f_n (resp. f_{n-m}) si $n \leq g - m$ (resp. si $n > g - m$), et nous avons alors les équations

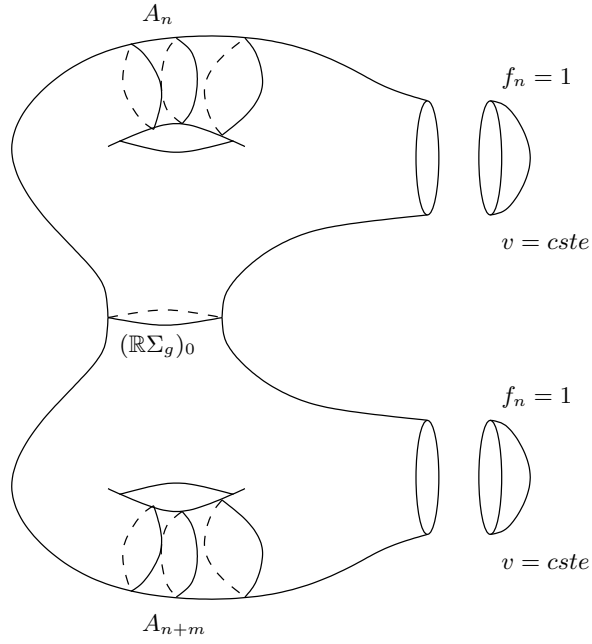
$$\begin{aligned} \bar{\partial}_{J_{\Sigma'}} v &= \lambda_n \frac{\bar{\partial}_{J_{\Sigma'}} f_n}{f_n} + \lambda_{n+m} u \frac{\bar{\partial}_{J_{\Sigma'}} f_n}{f_n} \text{ si } n \leq g - m, \\ \bar{\partial}_{J_{\Sigma'}} v &= \lambda_{n-m} \frac{\bar{\partial}_{J_{\Sigma'}} f_{n-m}}{f_{n-m}} + \lambda_n u \frac{\bar{\partial}_{J_{\Sigma'}} f_{n-m}}{f_{n-m}} \text{ si } n > g - m, \end{aligned}$$

sur la surface Σ' . Or, d'après le Lemme 3.11, ceci n'est pas possible, et nous obtenons à nouveau une contradiction.

Prenons alors $U \subset \Sigma_g - \bigcup_{j=1}^g A_j$ un ouvert invariant par c_Σ tel que $\omega|_U$ et $dv|_U$ ne s'annulent pas, et ξ une $(0, 1)$ -forme pour J à valeurs complexes, $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ -équivariante sur Σ_g , à support inclus dans U et telle que $\int_{\Sigma} \omega \wedge \xi \neq 0$. Comme dv ne s'annule pas sur U , posons $\dot{J} = (dv)^{-1} \circ (-i) \circ \xi \in T_J \mathbb{R}J(\Sigma_g)$ et nous avons

$$\int_{\Sigma} \omega \wedge d_{(J,t,v)} F_{f,\underline{\lambda}}(\dot{J}, 0, 0) = \int_{\Sigma} \omega \wedge \xi \neq 0,$$

car le support de \dot{J} est inclus dans $\Sigma_g - \bigcup_{j=1}^g A_j$. Ceci est en contradiction avec (*), et $d_{(J,t,v)} F_{f,\underline{\lambda}}(\cdot, 0, \cdot)$ est donc surjective.


 FIGURE 4. La surface Σ' découpée

Supposons maintenant que la courbe est séparante, que $l \geq k$ et que λ_{l+m} est non nul. Montrons qu'il existe un ouvert U non vide de $\Sigma_g \setminus \bigcup_{j=0}^g A_j$, invariant par c_Σ , et sur lequel ω et dv sont non nulles. On raisonne à nouveau par l'absurde, et on suppose que v est localement constante sur $\Sigma_g \setminus \bigcup_{j=0}^g A_j$. Sur $\Sigma_g \setminus \bigcup_{j=1}^g A_j$, v vérifie $\bar{\partial}_J v = \lambda_{l+m} \bar{\partial}_J u$. Il existe donc $c \in \mathbb{R}$ tel que $v = \lambda_{l+m} u + c$ sur $\Sigma_g \setminus \bigcup_{j=1}^g A_j$ car $d(v - u)$ s'annule un nombre infini de fois sur ce même ensemble. Si l'on découpe maintenant un tore contenant A_l et qu'on le rebouche comme précédemment, nous avons sur ce tore T

$$\bar{\partial}_{J_T} v + tv \frac{\bar{\partial}_{J_T} f_l}{f_l} = 0.$$

Or, l'opérateur $\bar{\partial}_{J_T, f_l}^t$ est injectif lorsque t n'est pas entier. En effet, dans le cas contraire il existerait $g \in \mathcal{C}^\infty(T, \mathbb{C}^*)$ tel que $t \frac{\bar{\partial}_{J_T} f_l}{f_l} = \frac{\bar{\partial}_{J_T} g}{g}$. En utilisant les mêmes techniques que dans le Lemme 3.3, on peut démontrer que g est homotope à un produit de la forme $(f_l)^p (g_l)^q$ avec $p, q \in \mathbb{Z}$. On a donc l'égalité

$$(*) \quad t \frac{\bar{\partial}_{J_T} f_l}{f_l} = \frac{\bar{\partial}_{J_T} g}{g} = p \frac{\bar{\partial}_{J_T} f_l}{f_l} + q \frac{\bar{\partial}_{J_T} g_l}{g_l}$$

dans $H_{\bar{\partial}_{J_T}}^1(T, \mathbb{C})$. Prenons alors $\omega \in H_{\bar{\partial}_{J_T}}^0(T, K_T)$ tel que

$$\int_{a_l} \omega = \frac{1}{2i\pi}.$$

On fait le produit extérieur par ω puis on intègre l'égalité (*) pour obtenir comme dans le Lemme 3.11

$$t = p + q \int_{b_l} \omega.$$

Le second terme de cette égalité est entier ou complexe alors que t ne l'est pas. Donc $\bar{\partial}_{J_T, f_l}^t$ est bien injectif et v est nul sur T . Toutefois, ceci n'est pas possible car on aurait alors $c = \lambda_{l+m}i \in \mathbb{R}$.

On raisonne ensuite de même que précédemment pour montrer que $d_{(J,t,v)}F_{f,\underline{\lambda}}(\cdot, 0, \cdot)$ est surjective.

Ceci nous donne immédiatement le premier point du Lemme. Quant au deuxième, $d_{(J,t,v)}\pi_{f,\underline{\lambda}}$ est surjective si et seulement si pour tout $\dot{t} \in \mathbb{R}$ il existe $(\dot{J}, w) \in T_J \mathbb{R}J(\Sigma_g) \times L^{1,p}(\Sigma_g, \mathbb{C})_{+1}$ tel que $(\dot{J}, \dot{t}, w) \in T_{(J,t,v)}\mathcal{M}_{f,\underline{\lambda}} = \ker(d_{(J,t,v)}F_{f,\underline{\lambda}})$. Autrement dit, $d_{(J,t,v)}\pi_{f,\underline{\lambda}}$ est surjective si et seulement si

$$\forall \dot{t} \in \mathbb{R}, \exists (\dot{J}, w) \in T_J \mathbb{R}J(\Sigma_g) \times L^{1,p}(\Sigma_g, \mathbb{C})_{+1}, d_{(J,t,v)}F_{f,\underline{\lambda}}(\dot{J}, 0, w) = -d_{(J,t,v)}F_{f,\underline{\lambda}}(0, \dot{t}, 0).$$

Mais cette dernière assertion est vraie car $d_{(J,t,v)}F_{f,\underline{\lambda}}(\cdot, 0, \cdot)$ est surjective. \square

Démonstration de la Proposition 3.2. — Premier cas : le support de $\frac{\bar{\partial}_J(f_l)}{f_l}$ est connexe. Prenons $f = f_l$ correspondant à une courbe stable ou globalement stable $a = a_l$, et soient $\lambda_1, \dots, \hat{\lambda}_l, \dots, \lambda_g$ des réels.

Nous établissons tout d'abord le résultat quand t est rationnel. Écrivons donc $t = \frac{p}{q}$ ($p \wedge q = 1$, et $q > 1$). Supposons qu'il existe une fonction v_t vérifiant

$$\bar{\partial}_{J,f}^t(v_t) = \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq l}}^g \lambda_j \alpha_j$$

Notons $r_q : \widetilde{\Sigma}_g^q \rightarrow \Sigma_g$ le revêtement à q feuillet associé à $a \bullet \in \text{Hom}(H_1(\Sigma_g, \mathbb{Z}), \mathbb{Z}/q\mathbb{Z})$ (voir Figure 5). Alors le relevé $\tilde{f} = f \circ r_q$ de f sur $\widetilde{\Sigma}_g^q$ admet une puissance t -ième (non unique, on en choisit une notée \tilde{f}^t). On note \tilde{v}_t et \tilde{f}_j les relevés respectifs de v_t et f_j , $j \in \{1, \dots, g\} \setminus \{l\}$; $\bar{\partial}_J$ désignera aussi le relevé de $\bar{\partial}_J$. Les fonctions \tilde{f}_j s'écrivent $\tilde{f}_j = f_{j,0} \times \dots \times f_{j,q-1}$, où les $f_{j,n}$ sont des fonctions du même type que celles construites au §3.1.1, à partir des relevés $a_{j,0}, \dots, a_{j,q-1}$ de a_j ; chacune ne varie donc que dans un des feuillets (voir Figure 5).

Celles-ci sont numérotées de sorte que $\tilde{f}^t \alpha_{j,n} = e^{2i\pi n t} \alpha_{j,n}$. Comme

$$\bar{\partial}_J(\tilde{v}_t \tilde{f}^t) = \tilde{f}^t \bar{\partial}_{J,\tilde{f}}^t(\tilde{v}_t),$$

on a

$$\bar{\partial}_J(\tilde{v}_t \tilde{f}^t) = \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq l}}^g \lambda_j \sum_{n=0}^{q-1} e^{2i\pi n t} \alpha_{j,n}.$$

Or, si le terme de gauche est dans l'image de l'opérateur $\bar{\partial}_J$, ce n'est pas le cas de celui de droite si un des λ_j est non nul. Ceci se vérifie en effet en utilisant par exemple une famille libre de $q(g-1)$ formes holomorphes $(\omega_{j,n})_{\substack{1 \leq j \neq l \leq g \\ 0 \leq n \leq q-1}}$ sur $\widetilde{\Sigma}_g^q$

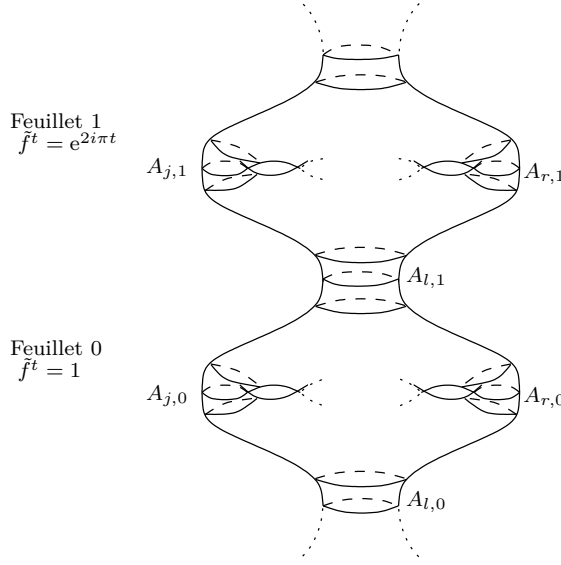


FIGURE 5. Revêtement et relevés

associée à la famille $(a_{j,n})_{\substack{1 \leq j \neq l \leq g \\ 0 \leq n \leq q-1}}$, c'est-à-dire telles que

$$\int_{a_{j,n}} \omega_{r,s} = \frac{1}{2i\pi} \delta_{(j,n),(r,s)}.$$

Alors, pour tout $j, r \in \{1, \dots, g\} \setminus \{l\}$ et $n, s \in \{0, \dots, q-1\}$, on a comme dans le Lemme 3.11

$$\int_{\widetilde{\Sigma}_g^q} \alpha_{j,n} \wedge \omega_{r,s} = \int_{\widetilde{\Sigma}_g^q} \frac{\bar{\partial}_J(f_{j,n})}{f_{j,n}} \wedge \omega_{r,s} = \delta_{(j,n),(r,s)},$$

si (Σ_g, c_Σ) n'est pas séparante ou si (Σ_g, c_Σ) est séparante et $j, r \leq k+m-1$, et

$$\int_{\widetilde{\Sigma}_g^q} \alpha_{j,n} \wedge \omega_{r,s} = \int_{\widetilde{\Sigma}_g^q} u \frac{\bar{\partial}_J(f_{j-m,n})}{f_{j-m,n}} \wedge \omega_{r,s} = i \delta_{(j-m,n),(r,s)},$$

si (Σ_g, c_Σ) est séparante et $j > k+m-1$ et $r \leq k+m-1$. Nous pouvons maintenant calculer

$$\int_{\widetilde{\Sigma}_g^q} \omega_{r,s} \wedge \bar{\partial}_J(\tilde{v}_t \tilde{f}^t) = \int_{\widetilde{\Sigma}_g^q} \omega_{r,s} \wedge \left(\sum_{\substack{j=1 \\ j \neq l}}^g \lambda_j \sum_{n=0}^{q-1} e^{2i\pi n t} \alpha_{j,n} \right).$$

ce qui donne

$$\begin{aligned} 0 &= \lambda_r e^{2i\pi s t} \text{ si } (\Sigma_g, c_\Sigma) \text{ n'est pas séparante ou si } (\Sigma_g, c_\Sigma) \text{ est séparante et } r < k \\ 0 &= (\lambda_r + i\lambda_{r+m}) e^{2i\pi s t} \text{ si } (\Sigma_g, c_\Sigma) \text{ est séparante et } k \leq r \leq k+m-1. \end{aligned}$$

Ainsi tous les λ_j sont nuls.

Passons maintenant au cas où t n'est plus forcément rationnel. Si nous supposons par l'absurde que $\mathcal{M}_{f,\underline{\lambda}}$ est non vide et que $\underline{\lambda}$ n'est pas nul, alors d'après le Lemme 3.12, $\pi_{f,\underline{\lambda}}$ est une application ouverte et son image contient donc un rationnel. Mais ceci contredit la première partie de la preuve. $\mathcal{M}_{f,\underline{\lambda}}$ est donc vide, ce qui conclut ce premier cas.

Deuxième cas : le support de $\frac{\bar{\partial}_J(f_l)}{f_l}$ a deux composantes connexes.

Prenons $f = f_l$ correspondant à une paire de courbes simples notée c . Nous ne montrons ici que le fait que la forme $\alpha_{l+m} = \bar{\partial}_J(u)$ n'est pas dans l'image de l'opérateur $\bar{\partial}_{J,f}^t$, le reste se montrant comme dans le premier cas.

Commençons par le cas $t = \frac{p}{q}$, $p \wedge q = 1$ et $q > 1$. Supposons par l'absurde l'existence d'une fonction v_t vérifiant

$$\bar{\partial}_{J,f}^t(v_t) = \bar{\partial}_J(u).$$

En raisonnant comme précédemment sur le revêtement à q feuillets associé à $c \bullet$, et en dénotant avec un tilde les relevés des diverses fonctions, voir Figure 6, on a

$$\bar{\partial}_J(\tilde{v}_t \tilde{f}^t) = \tilde{f}^t \bar{\partial}_J(\tilde{u}).$$

La surface $\widetilde{\Sigma}_g^q$ est séparée en deux composantes connexes par les relevés de $\mathbb{R}\Sigma_g$.

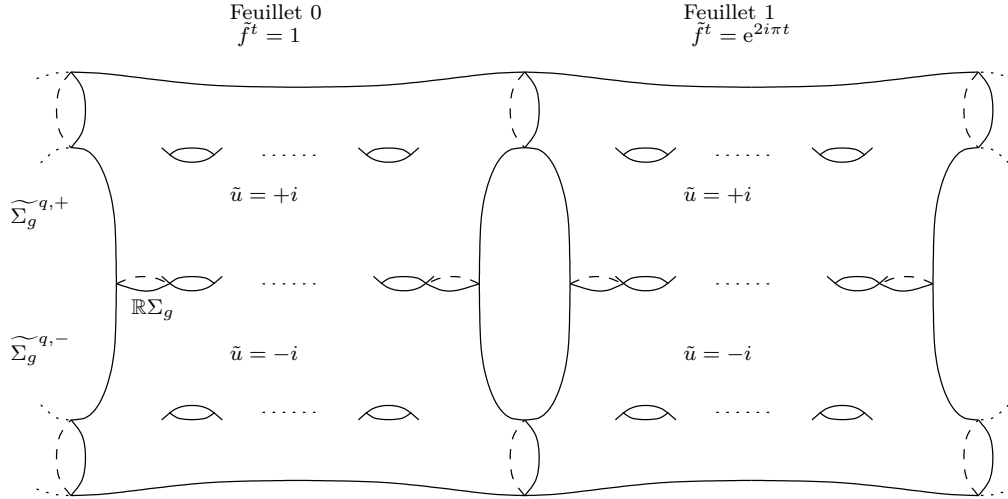


FIGURE 6. Revêtement et relevés pour une courbe séparante

Prenons $\widetilde{\Sigma}_g^{q,+}$ celle où la partie imaginaire de \tilde{u} est positive, et restreignons-y l'équation précédente. Définissons la fonction \tilde{u}^+ par $\tilde{u}^+ = \sum_{n=0}^{q-1} u_n$, où $u_n = \tilde{u}$ sur le n -ième feuillet et $u_n = i$ ailleurs. Ainsi $\bar{\partial}_J(\tilde{u}^+) = \bar{\partial}_J(\tilde{u})$, et $\tilde{f}^t \bar{\partial}_J(\tilde{u}^+) = \sum_{n=0}^{q-1} e^{2i\pi nt} \bar{\partial}_J(u_n)$, de sorte que nous obtenons une fonction holomorphe h_t sur $\widetilde{\Sigma}_g^{q,+}$ donnée par

$$h_t = \tilde{f}^t \tilde{v}_t - \sum_{n=0}^{q-1} e^{2i\pi nt} u_n.$$

De plus,

$$h_t(\partial(\widetilde{\Sigma}_g^{q,+})) \subset \bigcup_{n=0}^{q-1} (e^{2i\pi nt}(i + \mathbb{R})) = P_q,$$

car sur une composante réelle du n -ième feuillet, $n \in \{0, \dots, q-1\}$, on a $\tilde{v}_t \in \mathbb{R}$, $\tilde{f}^t = e^{2i\pi nt}$, $u_n = 0$ et $u_j = i$ si $j \neq n$, tandis que $\sum_{\substack{j=0 \\ j \neq n}}^{q-1} e^{2i\pi jt} = -e^{2i\pi nt}$.

Comme h_t est une application ouverte, nous avons $\partial(h_t(\widetilde{\Sigma}_g^{q,+})) \subset h_t(\partial(\widetilde{\Sigma}_g^{q,+}))$, et comme $\widetilde{\Sigma}_g^{q,+}$ est compact, l'image de h_t est compacte. Prenons un disque B dans \mathbb{C} centré en 0 contenant l'image de h_t et de rayon minimal. Notons I un des points d'intersection du bord de ce disque avec le bord de l'image de h_t . Alors I est un point d'intersection entre deux droites de P_q . En effet, d'une part I est dans $h_t(\partial(\widetilde{\Sigma}_g^{q,+}))$ qui est inclus dans P_q , d'autre part si I n'était pas à l'intersection de deux droites, alors on aurait un petit intervalle centré en I sur la droite contenant I qui serait inclus dans le bord de l'image de h_t . Ceci contredirait la minimalité du rayon du disque B .

Notons D et D' les deux droites de P_q s'intersectant en I . Comme P_q ne contient qu'un nombre fini de droites, au voisinage de I le bord de l'image de h_t est inclus dans $D \cup D'$ et l'intérieur de l'image est contenue dans un des secteurs découpés par D et D' (voir Figure 7).

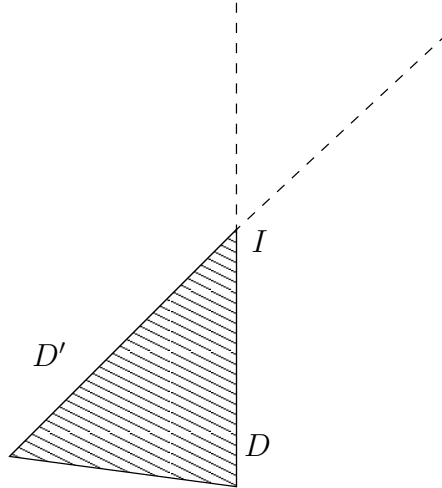


FIGURE 7. Image de h_t au voisinage de I (partie hachurée)

Prenons $n \in \{0, \dots, q-1\}$ tel que $D = e^{2i\pi nt}(i + \mathbb{R})$ et considérons la restriction $h_{n,t}$ de h_t au feuillet n . Prenons un petit voisinage V de I . Comme $h_{n,t}$ est une application ouverte, $V \cap \text{im}(h_{n,t})$ est d'intérieur non vide. Le bord de l'image de $h_{n,t}$ au voisinage de I n'est donc pas complètement inclus dans D . Ainsi, dans tout voisinage de I il existe un point qui est dans $\partial(\text{im}(h_{n,t}))$ mais pas dans D . On peut donc construire une suite de points $(I_r)_{r \in \mathbb{N}}$ de $\partial(\text{im}(h_{n,t})) \setminus D$ qui converge vers I . De plus, les antécédents de ces points par $h_{n,t}$ sont dans le bord du n -ième feuillet mais pas dans la partie réelle. Quitte à extraire, on obtient donc une suite de points du n -ième feuillet qui converge vers un point x qui est dans l'intérieur de $\widetilde{\Sigma}_g^{q,+}$ et tel que $h_t(x) = I$. Ceci est en contradiction avec le fait que h_t est une application ouverte sur $\widetilde{\Sigma}_g^{q,+}$.

Le cas où t n'est pas rationnel découle comme précédemment du Lemme 3.12. \square

3.2.3. Action des automorphismes réels sur le fibré déterminant. —

Passons maintenant à l'étude de l'action des automorphismes réels sur les orientations du fibré déterminant. Démontrons tout d'abord le résultat suivant.

Proposition 3.3. — *Soit (N, c_N) un fibré vectoriel complexe de rang 1 sur (Σ_g, c_Σ) de partie réelle non vide. Fixons une base symplectique réelle (a_i, b_i) de $H_1(\Sigma_g, \mathbb{Z})$ et notons \mathcal{B} la famille génératrice de $\mathbb{R}GL(N)$ associée (voir §3.1.1). Nous avons alors les deux cas suivant.*

- *Si la courbe (Σ_g, c_Σ) est séparante, l'automorphisme $f_j \in \mathcal{B}$, $0 \leq j \leq k - 1$ renverse les orientations du fibré $\text{Det}(N)$ si et seulement si $(\mathbb{R}N)_j$ est orientable, alors que les automorphismes $f_k, g_k, \dots, f_{m+k-1}, g_{m+k-1} \in \mathcal{B}$ les préservent toujours.*
- *Si la courbe (Σ_g, c_Σ) n'est pas séparante, l'automorphisme $f_j \in \mathcal{B}$, $0 \leq j \leq k - 1$ renverse les orientations du fibré $\text{Det}(N)$ si et seulement si $(\mathbb{R}N)_j$ est orientable, alors que les automorphismes $f_k, \dots, f_g \in \mathcal{B}$ les renversent toujours.*

Remarque 3.8. — Le cas où le genre g est nul se traite aisément. Nous avons dans ce cas un seul élément dans \mathcal{B} , et celui-ci est homotope à la fonction constante égale à -1 . Or celle-ci préserve les orientations si et seulement si $\dim(H^0(\Sigma_g, N)_{+1}) - \dim(H^1(\Sigma_g, N)_{+1}) = \deg(N) + 1$ est pair, donc si et seulement si $\mathbb{R}N$ n'est pas orientable.

La démonstration de la Proposition 3.3 se fait en deux temps. Nous commençons par traiter le cas du fibré trivial, puis nous utilisons des transformations élémentaires négatives pour nous ramener à ce cas.

3.2.3.1. Le cas du fibré trivial. —

Proposition 3.4. — *Soit (Σ_g, c_Σ) une courbe de partie réelle non vide. Fixons une base symplectique réelle (a_i, b_i) de $H_1(\Sigma_g, \mathbb{Z})$ et notons \mathcal{B} la famille génératrice de $\mathbb{R}GL(\mathbb{C})$ associée (voir §3.1.1). Nous avons alors les deux cas suivant.*

- *Si la courbe (Σ_g, c_Σ) est séparante, l'automorphisme $f_j \in \mathcal{B}$, $0 \leq j \leq k - 1$ renverse les orientations du fibré $\text{Det}(\mathbb{C})$, alors que les automorphismes $f_k, g_k, \dots, f_{m+k-1}, g_{m+k-1} \in \mathcal{B}$ les préservent.*
- *Si la courbe (Σ_g, c_Σ) n'est pas séparante, tous les éléments de \mathcal{B} renversent les orientations du fibré $\text{Det}(\mathbb{C})$.*

Fixons une structure complexe $J \in \mathbb{R}J(\Sigma_g)$. La Proposition 3.2 donne une trivialisations du fibré $\text{Det}(\mathbb{C})$ au-dessus des intervalles ouverts $(\bar{\partial}_{J,\cdot}^t)_{t \in]n, n+1[}$, $n \in \mathbb{Z}$. Toutefois, sous l'action d'un des automorphismes f considérés dans l'énoncé, un intervalle ouvert $(\bar{\partial}_{J,f}^t)_{t \in]n, n+1[}$, $n \in \mathbb{Z}$, est envoyé sur l'intervalle consécutif $(\bar{\partial}_{J,f}^t)_{t \in]n+1, n+2[}$. Avant de démontrer la Proposition 3.4, commençons par décrire le rapport entre les trivialisations du fibré $\text{Det}(\mathbb{C})$ au-dessus de ces intervalles consécutifs. Nous introduisons pour cela les opérateurs suivants :

Si (Σ_g, c_Σ) n'est pas séparante :

$$\begin{aligned} \Phi_{f_l,0}^t : (v, \lambda_1, \dots, \widehat{\lambda}_l, \dots, \lambda_g) &\in L^{1,p}(\Sigma_g, \mathbb{C}) \times \mathbb{R}^{g-1} \\ &\mapsto \bar{\partial}_{J,f_l}^t(v) + \sum_{\substack{n=0 \\ n \neq l}}^g \lambda_n \frac{\bar{\partial}_J(f_n)}{f_n} \in L^p(\Sigma_g, \Lambda_J^{0,1}(\Sigma_g)) \end{aligned}$$

Si (Σ_g, c_Σ) est séparante et $1 \leq l \leq k-1$:

$$\begin{aligned} \Phi_{f_l,1}^t : (v, \lambda_1, \dots, \widehat{\lambda}_l, \dots, \lambda_g) &\in L^{1,p}(\Sigma_g, \mathbb{C}) \times \mathbb{R}^{g-1} \\ &\mapsto \bar{\partial}_{J,f_l}^t(v) + \sum_{\substack{n=0 \\ n \neq l}}^{k-1} \lambda_n \frac{\bar{\partial}_J(f_n)}{f_n} \\ &\quad + \sum_{n=k}^{m+k-1} \left(\lambda_n \frac{\bar{\partial}_J(f_n)}{f_n} + \lambda_{n+m} u \frac{\bar{\partial}_J(f_n)}{f_n} \right) \in L^p(\Sigma_g, \Lambda_J^{0,1}(\Sigma_g)) \end{aligned}$$

Si (Σ_g, c_Σ) est séparante et $k \leq l \leq k+m-1$:

$$\begin{aligned} \Phi_{f_l,1}^t : (v, \lambda_1, \dots, \widehat{\lambda}_l, \dots, \lambda_g) &\in L^{1,p}(\Sigma_g, \mathbb{C}) \times \mathbb{R}^{g-1} \\ &\mapsto \bar{\partial}_{J,f_l}^t(v) + \sum_{n=0}^{k-1} \lambda_n \frac{\bar{\partial}_J(f_n)}{f_n} \\ &\quad + \sum_{\substack{n=k \\ n \neq l}}^{m+k-1} \left(\lambda_n \frac{\bar{\partial}_J(f_n)}{f_n} + \lambda_{n+m} u \frac{\bar{\partial}_J(f_n)}{f_n} \right) + \lambda_{l+m} \bar{\partial}_J(u) \in L^p(\Sigma_g, \Lambda_J^{0,1}(\Sigma_g)) \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} \Phi_{g_l,1}^t : (v, \lambda_1, \dots, \widehat{\lambda}_l, \dots, \lambda_g) &\in L^{1,p}(\Sigma_g, \mathbb{C}) \times \mathbb{R}^{g-1} \\ &\mapsto \bar{\partial}_{J,g_l}^t(v) + \sum_{n=0}^{k-1} \lambda_n \frac{\bar{\partial}_J(f_n)}{f_n} \\ &\quad + \sum_{\substack{n=k \\ n \neq l}}^{m+k-1} \left(\lambda_n \frac{\bar{\partial}_J(g_n)}{g_n} + \lambda_{n+m} u \frac{\bar{\partial}_J(g_n)}{g_n} \right) + \lambda_{l+m} \bar{\partial}_J(u) \in L^p(\Sigma_g, \Lambda_J^{0,1}(\Sigma_g)). \end{aligned}$$

Ceux-ci sont Fredholm d'indice 0 et sont surjectifs lorsque t n'est pas entier d'après la Proposition 3.2. Ces familles d'opérateurs rencontrent toutes des murs lorsque t est entier : leurs noyaux deviennent d'un coup non triviaux, de dimension 1 pour les deux premiers et de dimension 2 pour les deux derniers.

D'autre part, les déterminants des opérateurs Φ^t sont par définition canoniquement isomorphes à ceux des opérateurs $\bar{\partial}_J^t$ correspondant. On a donc (dans tous les cas) pour t non entier

$$\text{Det}(\bar{\partial}_J^t) = \text{Det}(\Phi^t) = \mathbb{R}.$$

Le Lemme suivant permet de décrire les trivialisations du fibré $\text{Det}(\mathbb{C})$ au dessus des droites $\bar{\partial}_J^t$.

Lemme 3.13. — *Les familles d'opérateurs $(\Phi_{\cdot,\cdot}^t)_{t \in \mathbb{R}}$ ont des traversées de murs régulières, c'est-à-dire que leurs dérivées par rapport à t aux valeurs entières fournissent des isomorphismes entre leurs noyaux et leurs conoyaux.*

Notons que la condition de traversée régulière est celle donnée par McDuff-Salamon dans [21] (Appendice A). C'est une condition strictement plus forte que la transversalité de la famille à la sous-variété des opérateurs Fredholm d'indice 0 dont le noyau est de dimension fixée non nulle, sauf dans le cas d'un noyau de dimension 1 où les deux conditions sont équivalentes.

Démonstration. — Montrons le par exemple pour $t = 0$. Si (Σ_g, c_Σ) n'est pas séparante et $1 \leq l \leq g$ (resp. si (Σ_g, c_Σ) est séparante et $1 \leq l \leq k - 1$), alors le noyau de $\Phi_{f_l,0}^0$ (resp. $\Phi_{f_l,1}^0$) est engendré par $(1, 0, \dots, 0)$ et son conoyau par $\frac{\bar{\partial}_J(f_l)}{f_l}$ d'après le Lemme 3.11. Or

$$\begin{aligned}\dot{\Phi}_{f_l,0}^0(1, 0, \dots, 0) &= \frac{\bar{\partial}_J(f_l)}{f_l} \\ \dot{\Phi}_{f_l,1}^0(1, 0, \dots, 0) &= \frac{\bar{\partial}_J(f_l)}{f_l}.\end{aligned}$$

Ce qui conclut ce cas.

Si (Σ_g, c_Σ) est séparante et $k \leq l \leq k + m - 1$, alors le noyau de $\Phi_{f_l,1}^0$ est engendré par $(1, 0, \dots, 0)$ et $(u, 0, \dots, 0, -1, 0, \dots, 0)$ (le -1 est en position $l + m$) et son conoyau par $\frac{\bar{\partial}_J(f_l)}{f_l}$ et $u \frac{\bar{\partial}_J(f_l)}{f_l}$ d'après le Lemme 3.11. Or

$$\begin{aligned}\dot{\Phi}_{f_l,1}^0(1, 0, \dots, 0) &= \frac{\bar{\partial}_J(f_l)}{f_l} \\ \dot{\Phi}_{f_l,1}^0(u, 0, \dots, 0, -1, 0, \dots, 0) &= u \frac{\bar{\partial}_J(f_l)}{f_l}.\end{aligned}$$

Ce qui termine la démonstration. □

Le Lemme 3.13 nous permet d'énoncer la Proposition suivante, tirée de [21] (Proposition A.2.4 p.499), qui nous renseigne sur la trivialisatation du fibré $\text{Det}(\mathbb{C})$ au dessus des familles d'opérateurs voulues.

Proposition 3.5 ([21]). — *Soient $t_1 < t_2$ deux réels non entiers séparés par un unique entier t_0 . Toute trivialisatation du fibré $\text{Det}(\mathbb{C})$ au-dessus du chemin $\bar{\partial}_J^t$ fournit un isomorphisme $\text{Det}(\bar{\partial}_J^{t_1}) = \text{Det}(\Phi^{t_1}) = \mathbb{R} \rightarrow \text{Det}(\bar{\partial}_J^{t_2}) = \text{Det}(\Phi^{t_2}) = \mathbb{R}$ de signe donné par la parité de la dimension du noyau de Φ^{t_0} .* □

Démonstration de la Proposition 3.4. — Fixons une structure complexe $J \in \mathbb{R}J(\Sigma_g)$. Supposons que g est non nul, le cas de la sphère étant traité dans la Remarque 3.8. Notons f un des automorphismes considérés dans l'enoncé. Prenons l'opérateur

de Cauchy-Riemann réel $\bar{\partial}_{J,f}^{-\frac{1}{2}}$ sur $(\mathbb{C}, \text{conj})$. En agissant sur cet opérateur, l'automorphisme $f \in \mathbb{RC}^\infty(\Sigma_g, \mathbb{C}^*)$ fournit d'après la formule de Leibniz l'opérateur

$$f^*(\bar{\partial}_{J,f}^{-\frac{1}{2}}) = \bar{\partial} + \frac{1}{2} \frac{\bar{\partial}(f)}{f} = \bar{\partial}_{J,f}^{\frac{1}{2}},$$

et un isomorphisme

$$(*) \quad \text{Det}(\bar{\partial}_{J,f}^{-\frac{1}{2}}) = \text{Det}(\Phi_{f,\varepsilon(\Sigma_g)}^{-\frac{1}{2}}) = \mathbb{R} \rightarrow \text{Det}(\bar{\partial}_{J,f}^{\frac{1}{2}}) = \text{Det}(\Phi_{f,\varepsilon(\Sigma_g)}^{\frac{1}{2}}) = \mathbb{R}.$$

Comme f envoie la base de $H_{\bar{\partial}_{J,f}^{-\frac{1}{2}}}^1(\Sigma_g, \mathbb{C})_{+1}$ donnée dans la Proposition 3.2 sur

la base de $H_{\bar{\partial}_{J,f}^{\frac{1}{2}}}^1(\Sigma_g, \mathbb{C})_{+1}$ donnée de la même façon et que $\Phi_{f,\varepsilon(\Sigma_g)}^{-\frac{1}{2}}$ et $\Phi_{f,\varepsilon(\Sigma_g)}^{\frac{1}{2}}$ sont construits à l'aide de ces bases, l'isomorphisme $(*)$ est positif. D'après la Proposition 3.5, il ne coïncide avec celui induit par la trivialisatıon du fibré déterminant que lorsque la dimension du noyau de $\Phi_{f,\varepsilon(\Sigma_g)}^0$ est paire.

Nous retrouvons ainsi les différents cas mentionnés dans l'énoncé de la Proposition.

- Si (Σ_g, c_Σ) est séparante, les noyaux des Φ^0 induis par les automorphismes $f_k, g_k, \dots, f_{k+m-1}, g_{k+m-1}$ sont tous de dimension 2. Ces automorphismes préservent donc les orientations de $\text{Det}(\mathbb{C})$.
- Si (Σ_g, c_Σ) n'est pas séparante, le noyau de $\Phi_{f_j,1}^0$, $j \in \{k, \dots, g\}$, est de dimension 1. Un automorphisme f_j , $j \in \{k, \dots, g\}$ renverse donc les orientations de $\text{Det}(N)$.
- Le noyau de $\Phi_{f_j,1}^0$, $j \in \{0, \dots, k-1\}$, est de dimension 1. L'automorphisme f_j , $j \in \{0, \dots, k-1\}$ renverse donc les orientations de $\text{Det}(\mathbb{C})$.

□

3.2.3.2. Transformations élémentaires. — Nous considérons maintenant (N, c_N) un fibré en droites complexes muni d'une structure réelle sur (Σ_g, c_Σ) , que l'on suppose de partie réelle non vide. Fixons une structure complexe $J \in \mathbb{R}J(\Sigma_g)$. Prenons un opérateur de Cauchy-Riemann réel $\bar{\partial} \in \mathbb{RC}_J(N)$. Notons \mathcal{N} le faisceau des sections holomorphes de $(N, \bar{\partial})$.

Définition 3.6. — *La transformation élémentaire réelle négative en $x \in \mathbb{R}\Sigma_g$ du faisceau \mathcal{N} est le faisceau localement libre \mathcal{N}_{-x} muni d'une structure réelle défini par la suite exacte*

$$(*) \quad 0 \rightarrow \mathcal{N}_{-x} \rightarrow \mathcal{N} \xrightarrow{ev_x} N_x \rightarrow 0.$$

Le faisceau \mathcal{N}_{-x} est de rang un, de degré $\deg(N) - 1$, et sa partie réelle est de première classe de Stiefel-Whitney $w_1(\mathbb{R}N) - [\mathbb{R}\Sigma_g]_x^$.*

Si $\{z, \bar{z}\}$ est une paire de points complexes conjugués de Σ_g , alors la transformation élémentaire réelle négative en $\{z, \bar{z}\}$ du faisceau \mathcal{N} est le faisceau localement libre $\mathcal{N}_{-z-\bar{z}}$ muni d'une structure réelle défini par la suite exacte

$$(**) \quad 0 \rightarrow \mathcal{N}_{-z-\bar{z}} \rightarrow \mathcal{N} \xrightarrow{ev_{z,\bar{z}}} N_z \oplus N_{\bar{z}} \rightarrow 0.$$

Le faisceau $\mathcal{N}_{-z-\bar{z}}$ est de rang un, de degré $\deg(N) - 2$, et sa partie réelle est de première classe de Stiefel-Whitney $w_1(\mathbb{R}N)$.

Si $(\mathcal{F}, c_{\mathcal{F}})$ est un faisceau holomorphe muni d'une structure réelle sur (Σ_g, c_{Σ}) , l'involution $c_{\mathcal{F}}$ induit des involutions sur $H^0(\Sigma_g, \mathcal{F})$ et $H^1(\Sigma_g, \mathcal{F})$ et on notera avec des indices $+1$ leurs espaces propres associés à la valeur propre 1. On écrira aussi $\text{Det}(\mathcal{F}) = \Lambda^{\max}(H^0(\Sigma_g, \mathcal{F})_{+1}) \otimes \Lambda^{\max}(H^1(\Sigma_g, \mathcal{F})_{+1})^*$.

Lemme 3.14. — *Si \mathcal{N}_{-x} est la transformation élémentaire réelle négative en $x \in \mathbb{R}\Sigma_g$ de \mathcal{N} , alors on a un isomorphisme canonique*

$$\text{Det}(\mathcal{N}) = \text{Det}(\mathcal{N}_{-x}) \otimes \mathbb{R}(N_x).$$

Si $\mathcal{N}_{-z-\bar{z}}$ est la transformation élémentaire réelle négative en $\{z, \bar{z}\}$ de \mathcal{N} , alors on a un isomorphisme canonique

$$\text{Det}(\mathcal{N}) = \text{Det}(\mathcal{N}_{-z-\bar{z}}) \otimes \det(\Delta_z),$$

où

$$\Delta_z = \{(v, c_N(v)) \in N_z \oplus N_{\bar{z}}\}.$$

Démonstration. — Ces deux isomorphismes proviennent directement des suites exactes longues de cohomologie associées aux suites exactes (*) et (**). \square

Après une transformation élémentaire négative en $x \in \mathbb{R}\Sigma_g$ du faisceau \mathcal{N} nous retrouvons un fibré en droites holomorphe réel $(N_{-x}, \bar{\partial}_{-x}, c_{N, -x})$ dont le faisceau des sections holomorphes est naturellement isomorphe au faisceau \mathcal{N}_{-x} de la façon suivante. Prenons une carte locale holomorphe (U, ξ) de Σ_g centrée en x et $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ -équivariante. Le fibré N_{-x} est alors obtenu en recollant $N_{|(\Sigma_g \setminus \{x\})}$ et $N|_U$ par l'application de recollement

$$(*) \quad \begin{array}{ccc} N_{|U \cap (\Sigma_g \setminus \{x\})} & \rightarrow & N_{|(\Sigma_g \setminus \{x\}) \cap U} \\ (\xi, v) & \mapsto & (\xi, \xi v). \end{array}$$

Nous pouvons faire de même avec une transformation en une paire complexe conjuguée $\{z, \bar{z}\}$ pour obtenir un fibré holomorphe $(N_{-z-\bar{z}}, \bar{\partial}_{-z-\bar{z}}, c_{N, -z-\bar{z}})$.

Une fois le fibré N_{-x} fixé, nous avons deux inclusions naturelles $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ -équivariantes (voir aussi [26])

$$\begin{aligned} i_{-x} &: L^{k,p}(\Sigma_g, N_{-x}) \rightarrow L^{k,p}(\Sigma_g, N)_{-x} \\ j_{-x} &: L^{k-1,p}(\Sigma_g, \Lambda^{0,1}\Sigma_g \otimes N_{-x}) \rightarrow L^{k-1,p}(\Sigma_g, \Lambda^{0,1}\Sigma_g \otimes N), \end{aligned}$$

où $k \geq 1$, $p > 2$ et $L^{k,p}(\Sigma_g, N)_{-x}$ désigne les éléments de $L^{k,p}(\Sigma_g, N)$ qui s'annulent en x . On remarque que si $\bar{\partial}'$ est un autre opérateur de Cauchy-Riemann sur N , alors sa restriction à $L^{k,p}(\Sigma_g, N_{-x})$ à travers i_{-x} est à valeurs $L^{k-1,p}(\Sigma_g, \Lambda^{0,1}\Sigma_g \otimes N_{-x})$. En effet, $s \in L^{k,p}(\Sigma_g, N)_{-x}$ est dans l'image de i_{-x} si et seulement si il existe $s' \in L^{k,p}(\Sigma_g, N)$ tel qu'on ait $s = \xi s'$ au voisinage de x . Donc $\bar{\partial}'(s) = \bar{\partial}'(\xi s') = \xi \bar{\partial}'(s') \in j_{-x}(L^{k-1,p}(\Sigma_g, \Lambda^{0,1}\Sigma_g \otimes N_{-x}))$ car ξ est holomorphe. On a l'analogue pour les transformations en deux points complexes conjugués. On obtient donc deux applications

$$\begin{aligned} t_{-x} &: \mathbb{R}\mathcal{C}_J(N) \rightarrow \mathbb{R}\mathcal{C}_J(N_{-x}) \\ \text{et } t_{-z-\bar{z}} &: \mathbb{R}\mathcal{C}_J(N) \rightarrow \mathbb{R}\mathcal{C}_J(N_{-z-\bar{z}}). \end{aligned}$$

De plus, l'injection i_{-x} (resp. $i_{-z-\bar{z}}$) induit un isomorphisme entre le faisceau des sections holomorphes de $(N_{-x}, t_{-x}(\bar{\partial}'))$ (resp. de $(N_{-z-\bar{z}}, t_{-z-\bar{z}}(\bar{\partial}'))$) et le faisceau des sections holomorphes de $(N, \bar{\partial}')$ qui s'annulent en x (resp. en z et \bar{z}).

Ces fibrés N_{-x} et $N_{-z-\bar{z}}$ ne sont pas canoniquement définis. Toutefois les isomorphismes i_{-x} et $i_{-z-\bar{z}}$ nous donnent avec le Lemme 3.14 (voir aussi [26], Lemma 2.4.1),

Lemme 3.15. — *Soit $(N_{-x}, c_{N_{-x}})$ (resp. $(N_{-z-\bar{z}}, c_{N_{-z-\bar{z}}})$) un fibré vectoriel complexe muni d'une structure réelle associé à une transformation élémentaire réelle négative de N en $x \in \mathbb{R}\Sigma_g$ (resp. en $\{z, \bar{z}\}$). Nous avons des isomorphismes canoniques*

$$\begin{aligned} \text{Det}(N) &= ((t_{-x})^* \text{Det}(N_{-x})) \otimes \mathbb{R}(N_x) \\ \text{Det}(N) &= ((t_{-z-\bar{z}})^* \text{Det}(N_{-z-\bar{z}})) \otimes \det(\Delta_z). \end{aligned}$$

□

Nous pouvons de plus déterminer la fibre de N_{-x} (resp. $N_{-z-\bar{z}}$) au-dessus de x (resp. z et \bar{z}).

Lemme 3.16. — *Les injections i_{-x} et $i_{-z-\bar{z}}$ induisent naturellement des isomorphismes*

$$\begin{aligned} (N_{-x})_x &= T_x^* \Sigma_g \otimes N_x, \\ (N_{-z-\bar{z}})_z &= T_z^* \Sigma_g \otimes N_z, \\ \text{et } (N_{-z-\bar{z}})_{\bar{z}} &= T_{\bar{z}}^* \Sigma_g \otimes N_{\bar{z}}. \end{aligned}$$

Démonstration. — Nous faisons la démonstration dans le cas d'une transformation élémentaire en un point réel, l'autre cas étant analogue. Fixons un opérateur $\bar{\partial} \in \mathbb{R}\mathcal{C}_J(N)$. Prenons un élément v dans $(N_{-x})_x$ et considérons une section locale holomorphe s_v de $(N_{-x}, t_{-x}(\bar{\partial}))$ définie sur un voisinage de x et telle que $s_v(x) = v$. Alors $i_{-x}(s_v)$ est une section locale holomorphe de $(N, \bar{\partial})$ qui s'annule au point x . On peut donc définir sa dérivée en x $\nabla_x(i_{-x}(s_v)) = pr_x \circ d_x(i_{-x}(s_v)) \in T_x^* \Sigma_g \otimes N_x$, où $pr_x : T_{(x,0)}N \rightarrow N_x$ est la projection parallèlement au tangent à la section nulle de N .

Vérifions tout d'abord que si $\bar{\partial}' \in \mathbb{R}\mathcal{C}_J(N)$ est un autre opérateur et s'_v est une section locale holomorphe de $(N_{-x}, t_{-x}(\bar{\partial}'))$ valant v en x , on a $\nabla_x(i_{-x}(s_v)) = \nabla_x(i_{-x}(s'_v))$. Supposons dans un premier temps que v est non nul. Il existe alors une fonction f à valeurs complexes définie sur un petit voisinage de x , telle que $s'_v = f s_v$. En particulier $f(x) = 1$. De plus, $d_x(i_{-x}(s'_v)) = d_x(f i_{-x}(s_v)) = i_{-x}(s_v)(x) d_x(f) + f(x) d_x(i_{-x}(s_v)) = d_x(i_{-x}(s_v))$. Donc $\nabla_x(i_{-x}(s_v)) = \nabla_x(i_{-x}(s'_v))$. Si v est nul, une section s_0 s'écrit $f s$ où s est une trivialisatation locale de N_{-x} au voisinage de x et f est une fonction à valeurs complexes définie sur un petit voisinage de x et s'annulant en x . On trouve alors $d_x(i_{-x}(s_0)) = 0$, donc $\nabla_x(i_{-x}(s_0)) = 0$.

On obtient donc une application linéaire

$$\begin{aligned} (\nabla) \quad (N_{-x})_x &\rightarrow T_x^* \Sigma_g \otimes N_x \\ v &\mapsto \nabla_x(i_{-x} s_v), \end{aligned}$$

bien définie indépendamment du choix de l'opérateur et de s_v . Vérifions maintenant que celle-ci est injective. Prenons \tilde{s} une section locale holomorphe de $(N, \bar{\partial})$ ne s'annulant pas au voisinage de x . Alors, il existe s une section locale de $(N_{-x}, t_{-x}(\bar{\partial}))$ telle que $i_{-x}(s) = \xi \tilde{s}$. Donc $\nabla_x(i_{-x}(s)) = pr_x(d_x \xi \tilde{s}) \neq 0$. Comme $(N_{-x})_x$ est de dimension 1, on en conclut que l'application (∇) est injective. Par égalité des dimensions, c'est un isomorphisme. \square

Démonstration de la Proposition 3.3. — Fixons une structure complexe $J \in \mathbb{R}J(\Sigma_g)$. Prenons un point x_i , $1 \leq i \leq k_-$, sur chaque composante connexe de $\mathbb{R}\Sigma_g$ où $\mathbb{R}N$ est non-orientable, et choisissons $l = \frac{|\deg(N) - k_-|}{2}$ points $z_1, \dots, z_l \in \Sigma_g \setminus \mathbb{R}\Sigma_g$. Supposons tout d'abord que $\deg(N) - k_-$ est positif. En effectuant des transformations élémentaires réelles négatives en $\underline{x} = (x_1, \dots, x_{k_-}, z_1, c_\Sigma(z_1), \dots, z_l, c_\Sigma(z_l))$, on obtient un fibré en droites complexes muni d'une structure réelle $(N', c_{N'})$ de degré zéro et dont toutes les composantes réelles sont orientables. D'après le Lemme 3.15 nous avons un isomorphisme canonique

$$(*) \quad \text{Det}(N) = ((t_{-\underline{x}})^* \text{Det}(N')) \otimes \det \left(\bigoplus_{i=1}^{k_-} \mathbb{R}N_{x_i} \right) \otimes \det \left(\bigoplus_{i=1}^l \Delta_{z_i} \right).$$

Fixons f un des automorphismes considérés dans l'énoncé. D'après l'isomorphisme $(*)$ le signe de l'action de f sur les orientations de $\text{Det}(N)$ est donné par le signe de son action sur les orientations de $\text{Det}(N')$ si f est positive sur un nombre pair de composantes non-orientables de $\mathbb{R}N$ et par son opposé sinon. Enfin, en choisissant un isomorphisme entre $(N', c_{N'})$ et $(\mathbb{C}, \text{conj})$ on voit que le signe de l'action de f sur les orientations de $\text{Det}(N')$ est le même que sur les orientations de $\text{Det}(\mathbb{C})$.

Vérifions pour finir les différents cas.

- Si (Σ_g, c_Σ) est séparante, les automorphismes $f_k, g_k, \dots, f_{k+m-1}, g_{k+m-1}$ sont tous positifs sur $\mathbb{R}\Sigma_g$ et d'après la Proposition 3.4 ils préservent les orientations de $\text{Det}(\mathbb{C})$. Ils préservent donc les orientations de $\text{Det}(N)$.
- Si (Σ_g, c_Σ) n'est pas séparante, un des automorphismes f_j , $j \in \{k, \dots, g\}$ est positif sur toutes les composantes de $\mathbb{R}\Sigma_g$, et d'après la Proposition 3.4 il renverse les orientations de $\text{Det}(\mathbb{C})$. Il renverse donc les orientations de $\text{Det}(N)$.
- Un des automorphismes f_j , $j \in \{0, \dots, k-1\}$ est positif sur toutes les composantes de $\mathbb{R}\Sigma_g$ sauf sur la j -ième, et d'après la Proposition 3.4 il renverse les orientations de $\text{Det}(\mathbb{C})$. Il préserve donc les orientations de $\text{Det}(N)$ si et seulement si $(\mathbb{R}N)_j$ n'est pas orientable.

Ce qui conclut la démonstration de la Proposition 3.3. \square

Démonstration du Théorème 3.5. — Ce Théorème découle maintenant de la Proposition 3.3 de l'Exemple 3.2 et du Lemme 3.3. \square

3.3. Fibré déterminant sur le groupe de Picard

Nous donnons maintenant une application du Théorème 3.5.

Commençons par faire quelques remarques concernant le groupe de Picard réel (voir par exemple [12]). Soit (Σ_g, c_Σ) une surface de Riemann réelle de genre $g \geq 1$. Nous supposons que sa partie réelle est non vide.

Notons $\mathbb{R}\mathcal{L}(\Sigma_g)$ l'ensemble des fibrés en droites holomorphes réels sur (Σ_g, c_Σ) . Nous avons sur $\mathbb{R}\mathcal{L}(\Sigma_g)$ un fibré en droites réelles Det de fibre $\Lambda^{\max}(H^0(\Sigma_g, L)_{+1}) \otimes \Lambda^{\max}(H^1(\Sigma_g, L)_{+1})^*$ au-dessus de (L, c_L) .

Considérons $\mathbb{R}\text{Pic}(\Sigma_g)$ le groupe de Picard réel de (Σ_g, c_Σ) . Nous avons une application naturelle $\mathbb{R}\mathcal{L}(\Sigma_g) \rightarrow \mathbb{R}\text{Pic}(\Sigma_g)$ qui consiste à associer à un fibré en droites holomorphe réel sa classe d'isomorphisme. Toutefois, comme le montre la Remarque 3.5, un lacet dans $\mathbb{R}\text{Pic}(\Sigma_g)$ ne correspond pas à une déformation à isomorphisme près de fibrés en droites holomorphes réels.

Nous pouvons cependant associer à un tel lacet $([L]_t)_{t \in [0,1]}$ un élément de F^- , de la façon suivante. Choisissons un chemin d'opérateurs de Cauchy-Riemann réels $(\bar{\partial}_t)_{t \in [0,1]}$ sur un fibré en droites complexe muni d'une structure réelle (L, c_L) fixé se projetant dans $\mathbb{R}\text{Pic}(\Sigma_g)$ sur le lacet $([L]_t)_{t \in [0,1]}$. En prenant un automorphisme réel $f \in \mathbb{R}GL(L)$ tel que $f^* \bar{\partial}_1 = \bar{\partial}_0$ nous obtenons, d'après le Lemme 3.3, un élément $\text{ind}_2(f)$ de F^- . D'autre part, si $g \in \mathbb{R}GL(L)$ est un autre automorphisme vérifiant $g^* \bar{\partial}_1 = \bar{\partial}_0$, alors g est homotope à plus ou moins l'automorphisme f (car l'automorphisme -1 fixe les opérateurs de Cauchy-Riemann). Cette construction nous fournit un morphisme de « monodromie »

$$\mu : H_1(\mathbb{R}\text{Pic}(\Sigma_g), \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}) \rightarrow F^-.$$

D'autre part, nous introduisons comme Gross et Harris (voir [12]) le morphisme

$$\begin{aligned} \deg \times w_1 : \mathbb{R}\text{Pic}(\Sigma_g) &\rightarrow \mathbb{Z} \times H^1(\mathbb{R}\Sigma_g, \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}) \\ (L, c_L) &\mapsto (\deg(L), w_1(\mathbb{R}L)). \end{aligned}$$

Pour $d \in \mathbb{Z}$ et $w \in H^1(\mathbb{R}\Sigma_g, \mathbb{Z}/2\mathbb{Z})$ tels que $w([\mathbb{R}\Sigma_g]) = d \pmod{2}$, nous noterons $\mathbb{R}\text{Pic}_w^d(\Sigma_g) = (\deg \times w_1)^{-1}(d, w)$. Remarquons que

$$\mathbb{R}\text{Pic}(\Sigma_g) = \bigsqcup_{\substack{(d,w) \in \mathbb{Z} \times H^1(\mathbb{R}\Sigma_g, \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}) \\ w([\mathbb{R}\Sigma_g]) = d \pmod{2}}} \mathbb{R}\text{Pic}_w^d(\Sigma_g).$$

Comme nous l'avons noté dans la Remarque 3.7, lorsque d et $w([\mathbb{R}\Sigma_g])$ sont congrus à $g-1$ modulo 2, le morphisme \mathcal{A}^w est bien défini sur F^- .

Nous pouvons maintenant énoncer le résultat suivant.

Théorème 3.6. — *Soit (Σ_g, c_Σ) une surface de Riemann réelle de partie réelle non vide. Soit $d \in \mathbb{Z}$ et $w \in H^1(\mathbb{R}\Sigma_g, \mathbb{Z}/2\mathbb{Z})$ tels que $d = w([\mathbb{R}\Sigma_g]) = g-1 \pmod{2}$. Le fibré Det sur l'ensemble des fibrés en droites holomorphes réels de degré d et de partie réelle de première classe de Stiefel-Whitney w descend sur $\mathbb{R}\text{Pic}_w^d(\Sigma_g)$ en un fibré noté Det_w^d . De plus, la première classe de Stiefel-Whitney de ce fibré est donnée par :*

$$w_1(\text{Det}_w^d) = \mathcal{A}^w \circ \mu.$$

Comme nous l'avons déjà vu au §3.2, le fibré Det ne descend pas en un fibré sur $\mathbb{R}\text{Pic}(\Sigma_g)$ tout entier. En effet, si (L, c_L) est un fibré en droites holomorphe réel,

-1 en est un automorphisme holomorphe. Or comme nous l'avons déjà remarqué, -1 préserve les orientations de $\text{Det}(L)$ si et seulement si $\deg(L) + 1 - g$ est pair. Ainsi, le fibré Det ne descend que sur les composantes de $\mathbb{R}\text{Pic}(\Sigma_g)$ formées des fibrés dont le degré est de même parité que $g - 1$, et le Théorème 3.6 donne sa première classe de Stiefel-Whitney.

Pour étudier l'autre cas, nous fixons un point $p \in \mathbb{R}\Sigma_g$ et considérons le fibré Det_p sur $\mathbb{R}\mathcal{L}(\Sigma_g)$ de fibre $\Lambda^{\max}(H^0(\Sigma_g, L)_{+1}) \otimes \Lambda^{\max}(H^1(\Sigma_g, L)_{+1})^* \otimes \mathbb{R}L_p$ au-dessus de (L, c_L) .

Pour $w \in H^1(\mathbb{R}\Sigma_g, \mathbb{Z}/2\mathbb{Z})$, notons $\tilde{w}_p \in H_{g-1}^1(\mathbb{R}\Sigma_g, \mathbb{Z}/2\mathbb{Z})$ l'unique classe égale à w partout sauf peut-être sur la composante de $\mathbb{R}\Sigma_g$ contenant p . Nous pouvons maintenant énoncer la suite du Théorème 3.6.

Théorème 3.7. — *Soit (Σ_g, c_Σ) une surface de Riemann réelle de partie réelle non vide et soit p un point réel de Σ_g . Soit $d \in \mathbb{Z}$ et $w \in H^1(\mathbb{R}\Sigma_g, \mathbb{Z}/2\mathbb{Z})$ tels que $d = w([\mathbb{R}\Sigma_g]) = g \pmod{2}$. Le fibré Det_p sur l'ensemble des fibrés en droites holomorphes réels de degré d et de partie réelle de première classe de Stiefel-Whitney w descend sur $\mathbb{R}\text{Pic}_w^d(\Sigma_g)$ en un fibré noté $\text{Det}_{p,w}^d$. De plus, la première classe de Stiefel-Whitney de ce fibré est donnée par :*

$$w_1(\text{Det}_{p,w}^d) = \mathcal{A}^{\tilde{w}_p} \circ \mu.$$

Avant d'entamer la démonstration notons d'après la Remarque 3.1 qu'en déplaçant le point p sur une autre composante connexe de $\mathbb{R}\Sigma_g$, on ajoute $c \circ \mu$ à la classe du Théorème 3.7, où c est une courbe simple globalement invariante par c_Σ et reliant les deux composantes connexes de $\mathbb{R}\Sigma_g$ en question, et pour tout $a \in H_1(\mathbb{R}\text{Pic}(\Sigma_g), \mathbb{Z}/2\mathbb{Z})$, $c \circ \mu(a) = (\mu(a))(c)$.

Soulignons d'autre part que si le fibré Det_p est défini comme un produit tensoriel de Det avec $\mathbb{R}L_p$ sur $\mathbb{R}\mathcal{L}(\Sigma_g)$, ce n'est plus le cas pour $\text{Det}_{w,p}^d$ sur $\mathbb{R}\text{Pic}_w^d(\Sigma_g)$.

Démonstration des Théorèmes 3.6 et 3.7. — Prenons une base symplectique réelle de $H_1(\Sigma_g, \mathbb{Z})$ avec p comme point base. Choisissons un fibré vectoriel complexe (N, c_N) de rang un sur (Σ_g, c_Σ) . Posons $d = \deg(N)$ et $w = w_1(\mathbb{R}N)$. Nous savons qu'à chaque opérateur de Cauchy-Riemann sur N correspond une unique structure holomorphe et réciproquement (voir [18]). Nous avons donc un isomorphisme

$$\mathbb{R}\text{Pic}_w^d(\Sigma_g) \cong \mathbb{R}\mathcal{C}_J(N)/\mathbb{R}GL(N)$$

De plus, le tiré en arrière du fibré $\text{Det}(N)$ par cet isomorphisme est le fibré Det . D'autre part, le lacet dans $\mathbb{R}\mathcal{C}_J(N)/\mathbb{R}GL(N)$ engendré par un automorphisme $f \in \mathbb{R}GL(N)$ associé à une courbe $a \in H_1(\Sigma_g, \mathbb{Z})_{+1}$ est envoyé sur un lacet de monodromie $a^{\text{PD}} \in F^-$. Les Théorèmes 3.4 et 3.5 nous permettent alors de conclure. \square

Exemple 3.3. — Prenons par exemple le cas du genre $g = 1$. Chaque composante $\mathbb{R}\text{Pic}_w^d(\Sigma_1)$ est alors un cercle auquel est associée une monodromie $\pm f$, où f est une des deux fonctions de la famille \mathcal{B} construite au §3.1.1. Comme nous supposons que la partie réelle de Σ_1 est non vide, celle-ci a une ou deux composantes.

Lorsqu'elle en a deux, la courbe est séparante. Si d est pair, alors w a la même valeur sur chaque composante de $\mathbb{R}\Sigma_1$. Si nous appliquons alors le Théorème 3.6 en utilisant le Théorème 3.4 et l'Exemple 3.2, nous avons

$$w_1(\mathrm{Det}_w^d)([\mathbb{R}\mathrm{Pic}_w^d(\Sigma_1)]) = \mathcal{A}^w(f) = 1 - w([\mathbb{R}\Sigma_1]_0)$$

et nous voyons que le fibré déterminant est orientable exactement sur les composantes du groupe de Picard où $w \neq 0$. Si d est impair et p un point sur la composante où w est non nulle, alors $\tilde{w}_p = 0$ et de même que ci-dessus, le fibré $\mathrm{Det}_{p,w}^d$ n'est pas orientable. Si p est sur la composante où w est nulle, alors $\mathrm{Det}_{p,w}^d$ est orientable.

Lorsque $\mathbb{R}\Sigma_1$ n'a qu'une seule composante, la courbe n'est pas séparante. En raisonnant comme précédemment, lorsque d est pair, et le fibré déterminant n'est orientable sur aucune des composantes du groupe de Picard. Lorsque d est impair, \tilde{w}_p est nulle et $\mathrm{Det}_{p,w}^d$ n'est pas orientable.

Remarque 3.9. — Nous avons en fait calculé la première classe de Stiefel-Whitney du déterminant de la cohomologie de la partie réelle des fibrés universels de Poincaré décrits par Biswas et Hurtubise dans [6] lorsque la courbe (Σ_g, c_Σ) est de partie réelle non vide.

CHAPITRE 4

ÉTUDE DES AUTOMORPHISMES RÉELS

Considérons un fibré vectoriel complexe muni d'une structure réelle (N, c_N) sur (Σ_g, c_Σ) , que l'on suppose de partie réelle non vide. Nous avons étudié aux §§2 et 3 l'action des automorphismes de (N, c_N) au-dessus de l'identité sur les orientations du fibré $\text{Det}(N)$. Plus précisément, nous avons exprimé en termes topologiques cette action. Nous voulons maintenant faire de même avec les éléments de $\mathbb{R}Aut(N)$. Il nous faut donc prolonger sur tout $\mathbb{R}Aut(N)$ les morphismes $\tau : \mathbb{R}SL(N) \rightarrow (\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^k$, défini au §2.1, et $s_N : \mathbb{R}GL(N) \rightarrow \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$, défini au §3.2, qui codent topologiquement l'action des automorphismes au-dessus de l'identité sur les orientations de $\text{Det}(N)$.

Une première partie du travail a consisté à étudier l'action des automorphismes au-dessus de l'identité sur le produit des structures Pin^\pm de chaque composante de $\mathbb{R}N$. Les éléments de $\mathbb{R}Aut(N)$ agissent encore sur celles-ci. En effet, un automorphisme $(\Phi, \varphi) \in \mathbb{R}Aut(N)$ induit une permutation Φ_{p^\pm} de l'ensemble à $2b_0(\mathbb{R}\Sigma_g)$ éléments formé des structures Pin^\pm sur chaque composante de $\mathbb{R}N$, dont nous notons $\varepsilon(\Phi_{p^\pm})$ la signature. De plus, la restriction du morphisme $(\Phi, \varphi) \in \mathbb{R}Aut(N) \mapsto \varepsilon(\Phi_{p^\pm}) \in \{-1, 1\}$ à $\mathbb{R}SL(N)$ coïncide avec la composée du morphisme $\tau : \mathbb{R}SL(N) \rightarrow (\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^k$ défini au §2 et du morphisme d'augmentation $\mu : (\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^k \rightarrow \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$. Dans le §4.1, nous décrivons plus précisément l'action de $\mathbb{R}Aut(N)$ sur les structures Pin^\pm de $\mathbb{R}N$ en soulignant notamment qu'en général les actions d'un automorphisme de (N, c_N) sur les structures Pin^+ et Pin^- diffèrent. Ces remarques nous permettent de supposer dans la suite de notre étude que N est de rang 1. En effet, nous montrons de la même façon que dans le §3, que l'action d'un automorphisme (Φ, φ) sur les orientations du fibré $\text{Det}(N)$ peut se décomposer en trois termes : son action sur les structures Pin^+ de $\mathbb{R}N$, l'action de $(\det(\Phi), \varphi) \in \mathbb{R}Aut(\det(N))$ sur les orientations de $\text{Det}(\det(N))$ et l'action du relevé naturel $\Phi_\varphi \in \mathbb{R}Aut(\mathbb{C}^{\text{rg}(N)-1})$ de φ sur les orientations de $\text{Det}(\mathbb{C}^{\text{rg}(N)-1})$. Nous étudions cette dernière action au §4.2, en introduisant pour tout $\varphi \in \mathbb{R}Diff^+(\Sigma_g, w_1(\mathbb{R}N))$ l'automorphisme induit φ^* de $H^1(\Sigma_g, \mathbb{R})_{-1}$, ce

qui nous permet d'obtenir la situation suivante

$$\begin{array}{ccccccc}
 0 & \longrightarrow & \mathbb{R}GL(N) & \longrightarrow & \mathbb{R}Aut(N) & \longrightarrow & \mathbb{R}Diff^+(\Sigma_g, w_1(\mathbb{R}N)) \longrightarrow 0 \\
 & & \downarrow \varepsilon_{p\pm} & & \downarrow (\varepsilon_{p+}, \det(\varphi^*)^{\text{rg}(N)-1}) & & \downarrow \varepsilon_{\det(N)} \\
 & & \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} & & \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} & & \\
 & \searrow & \downarrow & & \downarrow & \swarrow & \\
 & & \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} & & \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} & &
 \end{array}$$

où les flèches courbes calculent le signe de l'action sur les orientations de $\text{Det}(N)$, et les deux flèches du bas sont les morphismes d'augmentation. Nous avons noté $\varepsilon_{\det(N)} : \mathbb{R}Aut(N) \rightarrow \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ le morphisme qui associe à un automorphisme le signe de l'action de son déterminant sur les orientations de $\text{Det}(\det(N))$. Pour décrire complètement l'action de $\mathbb{R}Aut(N)$ sur les orientations de $\text{Det}(N)$, il nous suffit donc d'étudier ce dernier morphisme, ce que nous faisons au §4.4. Il nous suffit pour cela de traiter le cas du rang 1.

Supposons donc maintenant que (N, c_N) soit un fibré en droites complexes. Si nous ne parvenons pas à obtenir de résultat pour tout le groupe $\mathbb{R}Aut(N)$ (voir Remarque 4.5), nous pouvons toutefois décrire l'action sur les orientations de $\text{Det}(N)$ des sous-groupes suivants : en prenant un diviseur D associé à (N, c_N) (voir §4.3) et en notant $\mathbb{R}Diff_D^+(\Sigma_g, w_1(\mathbb{R}N))$ le sous-groupe de $\mathbb{R}Diff^+(\Sigma_g, w_1(\mathbb{R}N))$ constitué des difféomorphismes fixant D , nous considérons $\mathbb{R}Aut_D(N)$ le sous-groupe de $\mathbb{R}Aut(N)$ relevant $\mathbb{R}Diff_D^+(\Sigma_g, w_1(\mathbb{R}N))$. Nous définissons pour cela au §4.3 la notion de relevé d'un difféomorphisme associé à un diviseur et obtenons au §4.4

Théorème. — Soit (N, c_N) un fibré en droites complexes sur (Σ_g, c_Σ) de partie réelle non vide. Soit D un diviseur associé à (N, c_N) et $\varphi \in \mathbb{R}Diff^+(\Sigma_g, w_1(\mathbb{R}N))$ tel que $\varphi_*D = D$. Le signe de l'action d'un relevé $\Phi_D \in \mathbb{R}Aut(N)$ de φ associé à D sur les orientations du fibré $\text{Det}(N)$ est donné par le produit

$$\varepsilon_D(\varphi) = \varepsilon(\varphi|_D) \varepsilon(\sigma_\varphi^D) \det(\varphi^*),$$

où $\varphi|_D$ est la permutation des points du support de D comptés avec multiplicités induite par φ , σ_φ^D est la permutation induite par φ sur les orientations des composantes de $\mathbb{R}\Sigma_g$ qui contiennent des points de D , et φ^* est l'automorphisme de $H^1(\Sigma_g, \mathbb{R})_{-1}$ induit par φ .

Ainsi, nous pouvons résumer la situation grâce au diagramme suivant

$$\begin{array}{ccccccc}
 (*) & 0 & \longrightarrow & \mathbb{R}GL(N) & \longrightarrow & \mathbb{R}Aut_D(N) & \longrightarrow & \mathbb{R}Diff_D^+(\Sigma_g, w_1(\mathbb{R}N)) \longrightarrow 0 \\
 & & & \downarrow \varepsilon_{p\pm} & & \downarrow (\varepsilon_{p+}, (-1)^{s_N(\Phi \circ \Phi_D^{-1})}) & & \downarrow \varepsilon_D(\varphi) \\
 & & & \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} & & \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} & & \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \\
 & \searrow & & \downarrow & & \downarrow & \swarrow & \\
 & & & \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} & & \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} & &
 \end{array}$$

où les flèches courbes calculent à nouveau l'action des automorphismes sur les orientations de $\text{Det}(N)$. Nous obtenons donc une description complète de l'action des sous-groupes $\mathbb{R}Aut_D(N)$ de $\mathbb{R}Aut(N)$ sur les orientations de $\text{Det}(N)$.

Lorsque la courbe (Σ_g, c_Σ) est séparante ou lorsque (N, c_N) est de degré pair et de partie réelle orientable, nous arrivons à caractériser topologiquement les relevés associés à des diviseurs (voir §4.4.3). Nous discutons le cas général dans la Remarque 4.5.

Nous étudions également au §4.2 le cas particulier du fibré tangent à la courbe (Σ_g, c_Σ) et en déduisons

Théorème. — *Pour $g \geq 4$, la première classe de Stiefel-Whitney de l'espace des modules $\mathcal{M}_{g,k,\varepsilon}$ des courbes de genre g admettant une involution anti-holomorphe dont la partie réelle est séparante (resp. non séparante) si $\varepsilon = 1$ (resp. si $\varepsilon = 0$) et a k composantes connexes est donnée par $w_1(\mathcal{M}_{g,k,\varepsilon}) = w_1(\mathcal{H}_1(\Sigma_g, \mathbb{R})_{+1})$.*

4.1. Action des automorphismes sur les structures Pin^\pm

Comme nous l'avons mentionné plus haut, les éléments de $\mathbb{R}Aut(N)$ agissent sur les structures Pin^\pm de $\mathbb{R}N$. Ceci va nous permettre de nous ramener au cas du rang 1 comme au §3 (voir Proposition 4.2). Avant cela, nous remarquons dans la Proposition 4.1 qu'en général l'action d'un élément de $\mathbb{R}Aut(N)$ n'est pas la même sur les structures Pin^+ et sur les structures Pin^- de $\mathbb{R}N$. Plus précisément, prenons (N, c_N) un fibré vectoriel complexe muni d'une structure réelle sur (Σ_g, c_Σ) et considérons un difféomorphisme $\varphi \in \mathbb{R}Diff^+(\Sigma_g, w_1(\mathbb{R}N))$. Il induit une permutation σ_φ sur l'ensemble à $2k$ éléments formé des orientations des composantes connexes de $\mathbb{R}\Sigma_g$. Cette permutation laisse stable le sous-ensemble à $2k_-$ éléments formé des orientations de composantes connexes de $\mathbb{R}\Sigma_g$ sur lesquelles $\mathbb{R}N$ n'est pas orientable. Notons σ_φ^- la permutation induite sur cet ensemble.

Proposition 4.1. — *Soit (N, c_N) un fibré vectoriel complexe de rang au moins deux muni d'une structure réelle sur (Σ_g, c_Σ) , de partie réelle non vide, et soit $(\Phi, \varphi) \in \mathbb{R}Aut(N)$. On a $\varepsilon(\Phi_{p+}) = \varepsilon(\Phi_{p-})\varepsilon(\sigma_\varphi^-)$.*

Commençons par donner une autre définition des différentes signatures intervenant dans l'énoncé. Le difféomorphisme φ induit une permutation des composantes connexes de $\mathbb{R}\Sigma_g$ dont on note $c_1 \dots c_l \dots c_m$ la décomposition en cycles disjoints. On suppose de plus que le support des cycles c_1, \dots, c_l est formé des composantes de $\mathbb{R}\Sigma_g$ sur lesquelles $\mathbb{R}N$ n'est pas orientable. On note $l(c_i)$ la longueur du cycle c_i .

On associe alors à chaque cycle c_i

- deux éléments $s_{p^\pm}(c_i) \in \{-1, 1\}$: soit $(\mathbb{R}\Sigma_g)_j$ dans le support de c_i , alors $s_{p^\pm}(c_i)$ vaut 1 si $\Phi^{l(c_i)}$ (qui envoie la composante $(\mathbb{R}N)_j$ sur elle-même) préserve les structures Pin^\pm de $(\mathbb{R}N)_j$ et vaut -1 sinon.

- un élément $s_\varphi(c_i) \in \{-1, 1\}$: soit $(\mathbb{R}\Sigma_g)_j$ dans le support de c_i , alors $s_\varphi(c_i)$ vaut 1 si $\varphi^{l(c_i)}$ (qui envoie la composante $(\mathbb{R}\Sigma_g)_j$ sur elle-même) préserve les orientations de $(\mathbb{R}\Sigma_g)_j$ et vaut -1 sinon.

Lemme 4.1. — Les signes $s_{\mathbf{p}^\pm}(c_i)$ et $s_\varphi(c_i)$ ne dépendent pas du choix de la composante $(\mathbb{R}\Sigma_g)_j$ choisie. De plus, on a $\varepsilon(\Phi_{\mathbf{p}^\pm}) = \prod_{i=1}^m s_{\mathbf{p}^\pm}(c_i)$, et $\varepsilon(\sigma_\varphi^-) = \prod_{i=1}^l s_\varphi(c_i)$.

Démonstration. — Traitons le cas de σ_φ^- , l'autre étant tout à fait analogue. Fixons un cycle c_i , $1 \leq i \leq l$. Son support est formé de $l(c_i)$ composantes connexes de $\mathbb{R}\Sigma_g$. Si c'_i est un cycle de la décomposition en cycles disjoints de σ_φ^- dont le support contient une orientation d'une des composantes du support de c_i , alors $l(c'_i)$ vaut soit $l(c_i)$ soit $2l(c_i)$. Ainsi deux cas se présentent (voir Figure 1) :

- soit $s_\varphi(c_i) = 1$, autrement dit $(c'_i)^{l(c_i)}$ préserve les orientations de $(\mathbb{R}\Sigma_g)_j$, et $l(c'_i) = l(c_i)$,
- soit $s_\varphi(c_i) = -1$, autrement dit $(c'_i)^{l(c_i)}$ échange les orientations de $(\mathbb{R}\Sigma_g)_j$, et $l(c'_i) = 2l(c_i)$.

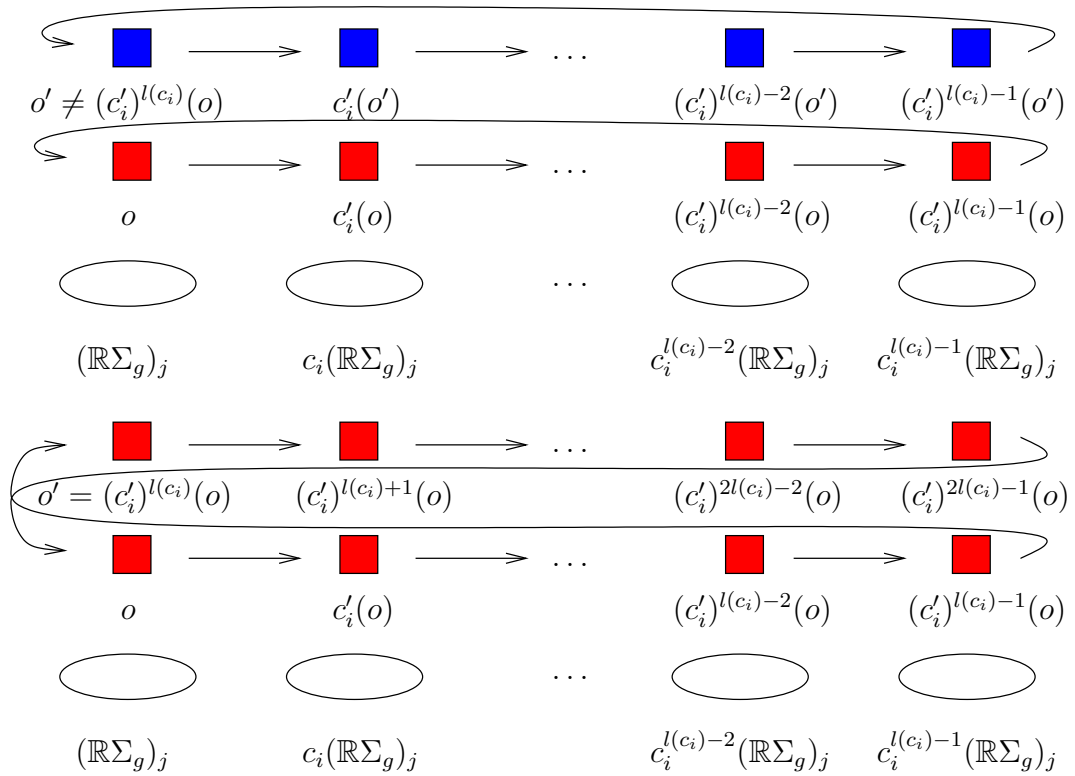


FIGURE 1. Le cycle c'_i lorsque $s_\varphi(c_i) = 1$ en haut, et lorsque $s_\varphi(c_i) = -1$ en bas.

Dans le premier cas, il existe un autre cycle c''_i dont le support est formé des orientations opposées à celles de c'_i . Dans le deuxième cas, la support de c'_i contient toutes les orientations des composantes formant le support de c_i .

La décomposition en cycles de supports disjoints de σ_φ^- est donc de la forme

$$\prod_{s_\varphi(c_i)=1} (c'_i c''_i) \prod_{s_\varphi(c_i)=-1} c'_i.$$

Dans le premier produit, comme les cycles c'_i et c''_i sont de même longueur, leurs contributions au calcul la signature de σ_φ^- se compensent. Ainsi

$$\varepsilon(\sigma_\varphi^-) = \prod_{s_\varphi(c_i)=-1} (-1)^{2l(c_i)-1} = \prod_{i=1}^l s_\varphi(c_i).$$

□

Démonstration de la Proposition 4.1. — Grâce au Lemme 4.1 on peut réécrire l'égalité

$$\varepsilon(\Phi_{p+}) = \varepsilon(\Phi_{p-}) \varepsilon(\sigma_\varphi^-)$$

sous la forme

$$\prod_{i=1}^m s_{p+}(c_i) = \prod_{i=1}^m s_{p-}(c_i) \prod_{i=1}^l s_\varphi(c_i).$$

Ainsi, il suffit de démontrer que pour chaque cycle c_i , l'action de $\Phi^{l(c_i)}$ sur les structures Pin^+ de $(\mathbb{R}N)_j$, où $(\mathbb{R}\Sigma_g)_j$ est dans le support de c_i , coïncide avec celle sur les structures Pin^- de $(\mathbb{R}N)_j$ si et seulement si $(\mathbb{R}N)_j$ est orientable ou bien $(\mathbb{R}N)_j$ est non orientable et $\varphi^{l(c_i)}$ préserve les orientations de $(\mathbb{R}\Sigma_g)_j$.

Remarquons d'abord que si $\varphi^{l(c_i)}$ préserve les orientations de $(\mathbb{R}\Sigma_g)_j$ alors on peut homotoper $\Phi^{l(c_i)}$ en un automorphisme de $(\mathbb{R}N)_j$ qui relève l'identité sur $(\mathbb{R}\Sigma_g)_j$. Or l'action d'un tel automorphisme est la même sur les structures Pin^+ et Pin^- .

Supposons maintenant que $\varphi^{l(c_i)}$ échange les orientations de $(\mathbb{R}\Sigma_g)_j$. On choisit un isomorphisme entre $(\mathbb{R}N)_j$ et le modèle $[0, 1] \times \mathbb{R}^n / (0, v) \sim (1, rv)$, où r est l'identité si $(\mathbb{R}N)_j$ est orientable, et la symétrie orthogonale d'axe $e_1 = (1, 0, \dots, 0)$ sinon. L'automorphisme $\Phi^{l(c_i)}_{|(\mathbb{R}N)_j}$ induit un automorphisme f du modèle, et quitte à l'homotoper, on peut supposer qu'il est de la forme $f(t, v) = (1 - t, f_t(v))$ où f_t est un élément de $O_n(\mathbb{R})$ et $f_0 = r f_1 r$. Or, deux relevés de $t \mapsto 1 - t$ diffèrent d'un automorphisme au-dessus de l'identité et on sait que ces derniers agissent de la même manière sur les structures Pin^+ et Pin^- . Il suffit donc d'étudier l'action de l'automorphisme $g : (t, v) \mapsto (1 - t, v)$ sur les structures Pin^+ et Pin^- de $[0, 1] \times \mathbb{R}^n / (0, v) \sim (1, rv)$.

Notons $\pi_\pm : Pin_n^\pm(\mathbb{R}) \rightarrow O_n(\mathbb{R})$ les revêtements doubles et considérons les structures Pin^\pm sur $[0, 1] \times \mathbb{R}^n / (0, v) \sim (1, rv)$ données par $[0, 1] \times Pin_n^\pm(\mathbb{R}) / (0, p) \sim (1, e_1^\pm p) \xrightarrow{\pi^\pm} [0, 1] \times O_n(\mathbb{R}) / (0, v) \sim (1, rv)$ avec $\pi_\pm(e_1^\pm) = r$. Un relevé \tilde{g}^\pm de g au niveau des structures Pin^\pm doit vérifier pour tout $p \in Pin_n^\pm(\mathbb{R})$, $g \circ \pi_\pm(p) = \pi_\pm \circ \tilde{g}^\pm(p)$. Donc les seuls relevés possibles de g sont $\tilde{g}^\pm : (t, p) \mapsto (1 - t, p)$ ou $\tilde{g}^\pm : (t, p) \mapsto (1 - t, -p)$.

Or ces relevés doivent aussi vérifier pour tout $p \in Pin_n^\pm(\mathbb{R})$, $\tilde{g}_0^\pm(p) = e_1^\pm \tilde{g}_1^\pm(e_1^\pm p)$. Mais ceci n'est possible que si $e_1^\pm e_1^\pm = 1$. Ainsi, si $(\mathbb{R}N)_j$ est orientable g préserve

les structures Pin^\pm , et si $(\mathbb{R}N)_j$ n'est pas orientable, g préserve les structures Pin^+ mais pas les structures Pin^- . \square

Étant donné un difféomorphisme réel φ de (Σ_g, c_Σ) , on définit l'automorphisme $\Phi_\varphi \in \mathbb{R}Aut(\underline{\mathbb{C}}^n)$ au-dessus de φ par

$$\begin{aligned} \Phi_\varphi : \quad \underline{\mathbb{C}}^n &\rightarrow \underline{\mathbb{C}}^n \\ (x, v) &\mapsto (\varphi(x), v). \end{aligned}$$

Énonçons maintenant la Proposition 4.2 qui permet de décomposer le signe de l'action d'un automorphisme sur les orientations de $\text{Det}(N)$ en trois termes.

Proposition 4.2. — *Soit (N, c_N) un fibré vectoriel complexe sur (Σ_g, c_Σ) de partie réelle non vide et $\Phi \in \mathbb{R}Aut(N)$. Alors le signe de l'action de Φ sur les orientations du fibré $\text{Det}(N)$ est égal au produit du signe de l'action de $\det(\Phi)$ sur les orientations de $\text{Det}(\det(N))$ et du signe de l'action de Φ_φ sur les orientations de $\text{Det}(\underline{\mathbb{C}}^{\oplus \text{rg}(N)-1})$ si et seulement si $\varepsilon(\Phi_{p+}) = 1$.*

Démonstration. — D'après le Lemme 1.1, il existe un isomorphisme $f : (N, c_N) \rightarrow (\det(N) \oplus \underline{\mathbb{C}}^{\oplus \text{rg}(N)-1}, c_{\det(N)} \oplus c_{\underline{\mathbb{C}}^{\oplus \text{rg}(N)-1}})$ au-dessus de l'identité. Grâce à cet isomorphisme Φ a même action sur les orientations de $\text{Det}(N)$ que $f \circ \Phi \circ f^{-1}$ sur les orientations de $\text{Det}(\det(N) \oplus \underline{\mathbb{C}}^{\oplus \text{rg}(N)-1})$. Écrivons maintenant

$$f \circ \Phi \circ f^{-1} = (\det(\Phi) \oplus \Phi_\varphi) \circ ((\det(\Phi) \oplus \Phi_\varphi)^{-1} \circ f \circ \Phi \circ f^{-1}).$$

L'automorphisme $g = (\det(\Phi) \oplus \Phi_\varphi)^{-1} \circ f \circ \Phi \circ f^{-1}$ est au-dessus de l'identité et $\varepsilon(g_{p+}) = 1$ si et seulement si $\varepsilon(\Phi_{p+}) = 1$. Pour montrer cela, il nous suffit de vérifier que $\varepsilon((\det(\Phi) \oplus \Phi_\varphi)_{p+}) = 1$. En reprenant les notations de la démonstration de la Proposition 4.1, on vérifie pour chaque cycle c_i de la décomposition en cycles disjoints de $\varphi|_{\mathbb{R}\Sigma_g}$ que l'action de $(\det(\Phi) \oplus \Phi_\varphi)^{l(c_i)}$ sur les structures Pin^+ de $\mathbb{R}(\det(N) \oplus \underline{\mathbb{C}}^{\oplus \text{rg}(N)-1})_j$ (où $(\mathbb{R}\Sigma_g)_j$ est dans le support de c_i) est triviale. Le cas où $\varphi^{l(c_i)}$ préserve les orientations de $(\mathbb{R}\Sigma_g)_j$ est traité dans [17]. Supposons donc le contraire. On choisit un isomorphisme entre $(\mathbb{R}\det(N))_j$ et $[0, 1] \times \mathbb{R}/(0, v) \sim (1, rv)$ où r vaut 1 si $(\mathbb{R}N)_j$ est orientable et -1 sinon. On obtient alors un isomorphisme entre $\mathbb{R}(\det(N) \oplus \underline{\mathbb{C}}^{\oplus \text{rg}(N)-1})_j$ et $[0, 1] \times \mathbb{R}^{\text{rg}(N)}/(0, v) \sim (1, rv)$, où r est l'identité si $(\mathbb{R}N)_j$ est orientable, et la symétrie orthogonale d'axe $e_1 = (1, 0, \dots, 0)$ sinon. L'automorphisme $(\det(\Phi) \oplus \Phi_\varphi)^{l(c_i)}$ induit un automorphisme h du modèle, et quitte à l'homotoper, on peut supposer qu'il est de la forme $h(t, v) = (1 - t, r'v)$, où r' est l'identité si $\det(\Phi)^{l(c_i)}$ est positif sur $(\mathbb{R}N)_j$, et la symétrie orthogonale d'axe $e_1 = (1, 0, \dots, 0)$ sinon. À nouveau, comme dans la Proposition 4.1, on remarque que dans tous les cas, h préserve les structures Pin^+ du modèle. Ainsi, on a $\varepsilon((\det(\Phi) \oplus \Phi_\varphi)_{p+}) = 1$.

De plus, l'action de $\det(g) = \det(\Phi)^{-1} \circ \det(f) \circ \det(\Phi) \circ \det(f)^{-1}$ sur les orientations de $\text{Det}(\det(N))$ est triviale. Donc l'action de g sur les orientations de $\text{Det}(\det(N) \oplus \underline{\mathbb{C}}^{\oplus \text{rg}(N)-1})$ est triviale si et seulement si $\varepsilon(\Phi_{p+}) = 1$.

Ainsi, on a $\varepsilon(\Phi_{p+}) = 1$ si et seulement si le signe de l'action de Φ sur les orientations de $\text{Det}(N)$ est le même que celui de l'action de $(\det(\Phi) \oplus \Phi_\varphi)$ sur les orientations de $\text{Det}(\det(N) \oplus \underline{\mathbb{C}}^{\oplus \text{rg}(N)-1})$, lequel est donné par le produit du signe

de l'action de $\det(\Phi)$ sur les orientations de $\text{Det}(\det(N))$ et du signe de l'action de Φ_φ sur les orientations de $\text{Det}(\mathbb{C}^{\oplus \text{rg}(N)-1})$. \square

L'action de Φ_φ sur les orientations de $\text{Det}(\mathbb{C}^n)$ est étudiée dans le §4.2.1, et le cas du rang 1 est traité au §4.4.

4.2. Action du groupe des difféotopies réel sur l'espace de Teichmüller réel

4.2.1. Action des difféomorphismes sur $\text{Det}(\mathbb{C})$ et $\text{Det}(K_\Sigma)$. — Soit (Σ_g, c_Σ) une courbe réelle et considérons tout d'abord le fibré vectoriel complexe trivial de rang $n \geq 1$, \mathbb{C}^n muni de la structure réelle naturelle notée conj . La suite exacte (1) du Lemme 1.2 est naturellement scindée pour ce fibré par l'application $\varphi \in \mathbb{R}\text{Diff}(\Sigma_g) \mapsto \Phi_\varphi \in \mathbb{R}\text{Aut}(\mathbb{C}^n)$. Le déterminant de l'automorphisme Φ_φ nous fournit une section réelle du fibré $(\varphi^*(\mathbb{C}, \text{conj})) \otimes (\mathbb{C}, \text{conj})^*$ qui devient donc isomorphe à $(\mathbb{C}, \text{conj})$. Ainsi un élément de $\mathbb{R}\text{Aut}(\mathbb{C}^n)$ agit encore sur les structures Spin réelles sur (Σ_g, c_Σ) à travers son déterminant. À partir de cette action, on définit comme au §3.2 le signe $s_{\mathbb{C}^n}(\Phi) \in \{0, 1\}$ pour un automorphisme $(\Phi, \varphi) \in \mathbb{R}\text{Aut}(\mathbb{C}^n)$.

D'autre part, un difféomorphisme réel φ de (Σ_g, c_Σ) induit un automorphisme φ^* du lagrangien $H^1(\Sigma_g, \mathbb{R})_{-1}$.

Proposition 4.3. — *Le signe de l'action d'un élément (Φ, φ) de $\mathbb{R}\text{Aut}(\mathbb{C}^n)$ sur les orientations du fibré déterminant $\text{Det}(\mathbb{C}^n)$ est donné par*

$$(\varepsilon) \quad \varepsilon_{\mathbf{p}^\pm}(\Phi)(-1)^{s_{\mathbb{C}^n}(\Phi)} \det(\varphi^*)^n \in \{-1, 1\}.$$

La Proposition 4.3 correspond au cas particulier du fibré trivial et du diviseur nul dans le Théorème énoncé au début du §4. Notons que les deux premiers termes $\varepsilon_{\mathbf{p}^\pm}(\Phi)$ et $(-1)^{s_{\mathbb{C}^n}(\Phi)}$ sont analogues à ceux obtenus aux §2 et 3 respectivement, et ne font pas intervenir le difféomorphisme φ , au contraire du troisième terme $\det(\varphi^*)^n$.

Commençons par quelques remarques. La projection $(\bar{\partial}, J) \in \mathbb{R}\mathcal{C}(\mathbb{C}^n) \mapsto J \in \mathbb{R}J(\Sigma_g)$ admet une section naturelle $J \in \mathbb{R}J(\Sigma_g) \mapsto (\bar{\partial}_J^{\oplus n}, J) \in \mathbb{R}\mathcal{C}(\mathbb{C}^n)$, où $\bar{\partial}_J = \frac{1}{2}(d + i \circ d \circ J)$. Le fibré déterminant est donc défini sur $\mathbb{R}J(\Sigma_g)$, et est encore trivialisable sur cet espace qui est contractile. De plus, il s'écrit

$$\text{Det}(\mathbb{C}^n)_{|\mathbb{R}J(\Sigma_g)} = \left(\mathcal{H}^0(\Sigma_g, \mathbb{C})_{+1} \otimes \left(\Lambda^g \mathcal{H}^1(\Sigma_g, \mathbb{C})_{+1} \right)^* \right)^{\otimes n}$$

où $\mathcal{H}^0(\Sigma_g, \mathbb{C})_{+1}$ et $\mathcal{H}^1(\Sigma_g, \mathbb{C})_{+1}$ sont les fibrés sur $\mathbb{R}J(\Sigma_g)$ de fibres respectives $H_{\bar{\partial}_J}^0(\Sigma_g, \mathbb{C})_{+1}$ et $H_{\bar{\partial}_J}^1(\Sigma_g, \mathbb{C})_{+1}$ au-dessus de J . D'autre part, comme $(\Phi_\varphi)^*(\bar{\partial}_J, J) = (\bar{\partial}_{\varphi^*J}, \varphi^*J)$, l'action de l'automorphisme Φ_φ sur les orientations du fibré $\text{Det}(\mathbb{C}^n)$ est donnée par son action sur celles de $\text{Det}(\mathbb{C}^n)_{|\mathbb{R}J(\Sigma_g)}$. Nous pouvons maintenant énoncer le résultat intermédiaire suivant.

Lemme 4.2. — *Nous avons un isomorphisme canonique*

$$\text{Det}(\mathbb{C}^n)_{|\mathbb{R}J(\Sigma_g)} \cong \det(\mathcal{H}^1(\Sigma_g, \mathbb{R})_{-1})^{\otimes n},$$

où $\mathcal{H}^1(\Sigma_g, \mathbb{R})_{-1}$ est le fibré trivial au-dessus de $\mathbb{R}J(\Sigma_g)$ de fibre $H^1(\Sigma_g, \mathbb{R})_{-1}$, tel que pour tout $\varphi \in \mathbb{R}Diff^+(\Sigma_g)$, le diagramme

$$(*) \quad \begin{array}{ccc} \text{Det}(\underline{\mathbb{C}}^n)_{|\mathbb{R}J(\Sigma_g)} & \longrightarrow & \det(\mathcal{H}^1(\Sigma_g, \mathbb{R})_{-1})^{\otimes n} \\ (\Phi_\varphi)_* \downarrow & & \downarrow (\varphi^{-1})^* \\ \text{Det}(\underline{\mathbb{C}}^n)_{|\mathbb{R}J(\Sigma_g)} & \longrightarrow & \det(\mathcal{H}^1(\Sigma_g, \mathbb{R})_{-1})^{\otimes n} \end{array}$$

commute.

Démonstration. — D'une part, l'évaluation des fonctions J -holomorphes réelles sur (Σ_g, c_Σ) donne un isomorphisme canonique

$$\mathcal{H}^0(\Sigma_g, \underline{\mathbb{C}})_{+1} \xrightarrow{ev} \mathbb{R}$$

qui nous permet de dire que Φ_φ agit trivialement sur la partie $\mathcal{H}^0(\Sigma_g, \underline{\mathbb{C}})_{+1}$. D'autre part, nous avons par dualité de Serre

$$(\mathcal{H}^1(\Sigma_g, \underline{\mathbb{C}})_{+1})^* \cong \mathcal{H}^0(\Sigma_g, K_\Sigma)_{-1},$$

où $\mathcal{H}^0(\Sigma_g, K_\Sigma)_{-1}$ est le fibré sur $\mathbb{R}J(\Sigma_g)$ de fibre $H^0(\Sigma_g, K_{\Sigma, J})_{-1}$ au-dessus de J , et le diagramme suivant commute

$$\begin{array}{ccc} (\mathcal{H}^1(\Sigma_g, \underline{\mathbb{C}})_{+1})^* & \xrightarrow{\text{Serre}} & \mathcal{H}^0(\Sigma_g, K_\Sigma)_{-1} \\ {}^t(\Phi_\varphi^*) \downarrow & & \downarrow (d\varphi^{-1})^* \\ (\mathcal{H}^1(\Sigma_g, \underline{\mathbb{C}})_{+1})^* & \xrightarrow{\text{Serre}} & \mathcal{H}^0(\Sigma_g, K_\Sigma)_{-1}. \end{array}$$

Enfin, l'intégration des $(1, 0)$ -formes J -holomorphes le long des lacets sur Σ_g définit une dualité

$$\mathcal{H}^0(\Sigma_g, K_\Sigma)_{-1} \times \mathcal{H}_1(\Sigma_g, \mathbb{R})_{+1} \rightarrow i\mathbb{R},$$

où $\mathcal{H}_1(\Sigma_g, \mathbb{R})_{+1}$ est le fibré trivial sur $\mathbb{R}J(\Sigma_g)$ de fibre $H_1(\Sigma_g, \mathbb{R})_{+1}$, et nous avons à nouveau un diagramme

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{H}^0(\Sigma_g, K_\Sigma)_{-1} & \longrightarrow & (\mathcal{H}_1(\Sigma_g, \mathbb{R})_{+1})^* \\ (d\varphi^{-1})^* \downarrow & & \downarrow (\varphi^{-1})^* \\ \mathcal{H}^0(\Sigma_g, K_\Sigma)_{-1} & \longrightarrow & (\mathcal{H}_1(\Sigma_g, \mathbb{R})_{+1})^* \end{array}$$

qui commute grâce à la formule du changement de variables pour $\omega \in H_{\partial K_\Sigma, J}^0(\Sigma_g, K_\Sigma)$ et $c \in H_1(\Sigma_g, \mathbb{Z})$

$$\int_c \omega \circ d\varphi^{-1} = \int_{\varphi_*^{-1}c} \omega.$$

Tout compte fait, nous avons un isomorphisme

$$\text{Det}(\underline{\mathbb{C}}^n)_{|\mathbb{R}J(\Sigma_g)} \cong \det(\mathcal{H}^1(\Sigma_g, \mathbb{R})_{-1})^{\otimes n}$$

et le diagramme $(*)$ commute bien. \square

Démonstration de la Proposition 4.3. — Vérifions le résultat tout d'abord pour un automorphisme de la forme Φ_φ avec $\varphi \in \mathbb{R}Diff^+(\Sigma_g)$. Par construction, nous avons $\varepsilon_{p^\pm}(\Phi_\varphi) = 1$ et $s_{\mathbb{C}^n}(\Phi_\varphi) = 0$. Le signe topologique (ε) est donc simplement égal à $\det(\varphi^*)^n$.

D'autre part, le Lemme 4.2 nous montre que l'action de Φ_φ sur les orientations du fibré $\text{Det}(\mathbb{C}^n)_{|\mathbb{R}J(\Sigma_g)}$ est la même que celle de $(\varphi^{-1})^*$ sur $\det(H^1(\Sigma_g, \mathbb{R})_{-1})^{\otimes n}$. On retrouve ainsi le signe (ε) pour Φ_φ .

Pour un automorphisme $(\Phi, \varphi) \in \mathbb{R}Aut(\mathbb{C}^n)$ quelconque, on commence par le décomposer en $f \circ \Phi_\varphi$, où $f \in \mathbb{R}GL(\mathbb{C}^n)$. Or, nous avons déjà calculé le signe de l'action de Φ_φ , et d'après les Théorèmes 2.1 et 3.5, le signe de celle de f est donné par $\varepsilon_{p^\pm}(f)(-1)^{s_{\mathbb{C}^n}(f)}$. Le produit des deux signes nous donne le résultat voulu. \square

Remarque 4.1. — Le Lemme 4.2 nous permet de préciser le résultat obtenu dans la Proposition 4.2. Nous obtenons en effet que le signe de l'action d'un automorphisme $\Phi \in \mathbb{R}Aut(N)$ est le produit de $\varepsilon_{p^+}(\Phi)$ par $\det(\varphi^*)^{\text{rg}(N)-1}$ et par le signe de l'action de $\det(\Phi)$ sur les orientations de $\text{Det}(\det(N))$. Il reste encore à décrire cette dernière action, ce que nous faisons aux §§4.3 et 4.4.

Lemme 4.3. — *Il existe un isomorphisme canonique*

$$\text{Det}(K_\Sigma)_{|\mathbb{R}J(\Sigma_g)} \cong \det(\mathcal{H}^1(\Sigma_g, \mathbb{R})_{-1}),$$

où $\text{Det}(K_\Sigma)_{|\mathbb{R}J(\Sigma_g)}$ est le fibré sur $\mathbb{R}J(\Sigma_g)$ de fibre $\Lambda^g H^0(\Sigma_g, K_{\Sigma, J})_{+1} \otimes (H^1(\Sigma_g, K_{\Sigma, J})_{+1})^*$ au-dessus de J , tel que pour tout $\varphi \in \mathbb{R}Diff^+(\Sigma_g)$, le diagramme

$$\begin{array}{ccc} \text{Det}(K_\Sigma)_{|\mathbb{R}J(\Sigma_g)} & \longrightarrow & \det(\mathcal{H}^1(\Sigma_g, \mathbb{R})_{-1}) \\ (d\varphi^{-1})^* \downarrow & & \downarrow (\varphi^{-1})^* \\ \text{Det}(K_\Sigma)_{|\mathbb{R}J(\Sigma_g)} & \longrightarrow & \det(\mathcal{H}^1(\Sigma_g, \mathbb{R})_{-1}) \end{array}$$

commute.

Démonstration. — On procède comme dans le Lemme 4.2, sans avoir besoin de la dualité de Serre. \square

4.2.2. Action des difféomorphismes sur $\text{Det}(T\Sigma_g)$. — Le Lemme 4.3 permet aussi d'étudier le cas du fibré tangent à la courbe réelle. Rappelons pour cela qu'étant donné un opérateur de Cauchy-Riemann réel $\bar{\partial}$ sur un fibré vectoriel complexe (N, c_N) , on a un opérateur $\bar{\partial}^*$ sur (N^*, c_{N^*}) défini par

$$(*) \quad (\bar{\partial}^* \alpha)(v) = \bar{\partial}_J(\alpha(v)) - \alpha(\bar{\partial}v),$$

pour $\alpha \in \Gamma(\Sigma_g, N^*)$ et $v \in \Gamma(\Sigma_g, N)$.

Lemme 4.4. — *L'opérateur $\bar{\partial}^*$ est bien défini et est un élément de $\mathbb{R}C(N^*)$. Par exemple, pour les fibrés $T\Sigma_{g, J}$ et $K_{\Sigma, J}$, on a*

$$\begin{aligned} \bar{\partial}_{T\Sigma, J} &= \frac{1}{2}(\nabla^J + J \circ \nabla^J \circ J), \\ \bar{\partial}_{K\Sigma, J} &= \frac{1}{2}(d + i \circ d \circ J), \\ \bar{\partial}_{T\Sigma, J}^* &= \bar{\partial}_{K\Sigma, J}, \end{aligned}$$

où ∇^J est la connexion de Levi-Civita associée à une métrique induite par J .

Démonstration. — Fixons $\alpha \in \Gamma(\Sigma_g, N^*)$. Il nous faut vérifier que $\bar{\partial}^* \alpha$ tel que donné par l'égalité (*) ne dépend que de la valeur en chaque point de la section $v \in \Gamma(\Sigma_g, N)$. Prenons pour cela une fonction $f \in \mathcal{C}^\infty(\Sigma_g, \mathbb{C})$. Nous avons alors

$$\begin{aligned} \bar{\partial}_J(\alpha(fv)) - \alpha(\bar{\partial}(fv)) &= \alpha(v)\bar{\partial}_J(f) + f\bar{\partial}_J(\alpha(v)) - \alpha(\bar{\partial}_J(f)v) - f\alpha(\bar{\partial}v) \\ &= f(\bar{\partial}_J(\alpha(v)) - \alpha(\bar{\partial}v)), \end{aligned}$$

ce qui montre que $\bar{\partial}^* \alpha$ est bien défini. La formule de Leibniz se montre de la même façon.

D'autre part, une métrique associée à J s'écrit $\lambda(z)dz \otimes d\bar{z}$ dans des coordonnées locales holomorphes. On vérifie alors que $\nabla_{\frac{\partial}{\partial \bar{z}}}^J \frac{\partial}{\partial z} = \frac{1}{\lambda} \frac{\partial \lambda}{\partial z} \frac{\partial}{\partial z}$ et $\nabla_{i \frac{\partial}{\partial \bar{z}}}^J \frac{\partial}{\partial z} = \frac{i}{\lambda} \frac{\partial \lambda}{\partial z} \frac{\partial}{\partial z}$. Ainsi, $\nabla_{\frac{\partial}{\partial z}}^J + i \circ \nabla_{\frac{\partial}{\partial \bar{z}}} \circ i = 0$. Donc la structure holomorphe sur $T\Sigma_{g,J}$ est induite par l'opérateur $\bar{\partial}_{T\Sigma,J} = \frac{1}{2}(\nabla^J + J \circ \nabla^J \circ J)$.

Enfin, toujours dans des coordonnées locales holomorphes, on prend $\omega = wdz$ et $\xi = s \frac{\partial}{\partial z}$ et on calcule

$$\begin{aligned} \bar{\partial}_J(\omega(\xi)) &= \bar{\partial}_J(ws) \\ &= w\bar{\partial}_J(s) + \bar{\partial}_J(w)s \\ &= \omega(\bar{\partial}_{T\Sigma,J}\xi) + (\bar{\partial}_{K\Sigma,J}\omega)(\xi), \end{aligned}$$

ce qui montre que $\bar{\partial}_{T\Sigma,J}^* = \bar{\partial}_{K\Sigma,J}^*$. □

Comme on a une bijection entre $\mathbb{RC}(N)$ et $\mathbb{RC}(N^*)$ on peut comparer les fibrés $\text{Det}(N)$ et $\text{Det}(N^*)$, ce qui est l'objet de la Proposition 4.4.

Proposition 4.4. — *Soit (N, c_N) un fibré vectoriel complexe muni d'une structure réelle sur (Σ_g, c_Σ) . Supposons que \mathbb{RN} est orientable. On a un isomorphisme canonique $\text{Det}(N) = \text{Det}(N^*)^*$, où $\text{Det}(N^*)^*$ est défini au-dessus de $\mathbb{RC}(N)$ grâce à la correspondance $\bar{\partial} \mapsto \bar{\partial}^*$.*

En particulier, si (Φ, φ) est un automorphisme de (N, c_N) alors son action sur les orientations du fibré $\text{Det}(N)$ est la même que celle de $({}^t\Phi^{-1}, \varphi)$ sur les orientations de $\text{Det}(N^)$.*

Démonstration. — Considérons la suite exacte

$$0 \rightarrow N \rightarrow N \oplus N^* \rightarrow N^* \rightarrow 0.$$

Grâce à la correspondance $\bar{\partial} \in \mathbb{RC}(N) \mapsto \bar{\partial}^* \in \mathbb{RC}(N^*)$, on a un isomorphisme canonique

$$\text{Det}(N) = \text{Det}(N \oplus N^*) \otimes \text{Det}(N^*)^*,$$

où la fibre de $\text{Det}(N \oplus N^*)$ au dessus de $\bar{\partial} \in \mathbb{RC}(N)$ est $\text{Det}(\bar{\partial} \oplus \bar{\partial}^*)$.

De plus, nous avons des structures *Spin* naturelles sur chaque composante de $\mathbb{RN} \oplus \mathbb{RN}^*$ données de la façon suivante. Fixons une structure *Spin* sur une composante $(\mathbb{RN})_i$. Celle-ci induit une décomposition de $(\mathbb{RN})_i$ en somme directe de fibrés en droites réelles orientables définie à homotopie près. Par dualité, on obtient alors, à homotopie près, une décomposition en somme directe de fibrés en droites réelles orientables de $(\mathbb{RN})_i \oplus (\mathbb{RN}^*)_i$ ainsi qu'une orientation canonique

sur ce même fibré. Nous avons donc une structure *Spin* sur $(\mathbb{R}N)_i \oplus (\mathbb{R}N^*)_i$. De plus, cette structure ne dépend pas du choix de structure fait sur $(\mathbb{R}N)_i$.

Prenons alors un isomorphisme $f : N \oplus N^* \rightarrow \mathbb{C}^{2\text{rg}(N)}$ tel que

- $\det(f) : \det(N \oplus N^*) = \mathbb{C} \rightarrow \det(\mathbb{C}^{2\text{rg}(N)}) = \mathbb{C}$ vaut 1 et
- f envoie la structure *Spin* naturelle de chaque composante $\mathbb{R}N \oplus \mathbb{R}N^*$ sur celle naturelle de la composante correspondante de $\mathbb{R}(\mathbb{C}^{2\text{rg}(N)})$.

Remarquons qu'un tel isomorphisme est uniquement défini à homotopie près : un autre tel isomorphisme différera de f par multiplication à droite par un automorphisme de $\mathbb{C}^{2\text{rg}(N)}$ de déterminant 1 et préservant les structures *Spin* sur $\mathbb{R}(\mathbb{C}^{2\text{rg}(N)})$. Or d'après le Lemme 1.2 ces automorphismes sont homotopes à l'identité.

Nous avons ainsi grâce à la Proposition 4.3 un isomorphisme canonique entre $\text{Det}(N \oplus N^*)$ et $\det(\mathcal{H}^1(\Sigma_g, \mathbb{R})_{-1})^{\otimes 2\text{rg}(N)}$. Comme ce dernier fibré est canoniquement trivial, nous obtenons l'isomorphisme voulu dans l'énoncé. \square

Remarque 4.2. — Insistons sur une conséquence de la Proposition 4.4. Si (N, c_N) et $(N', c_{N'})$ sont deux fibrés vectoriels complexes sur (Σ_g, c_Σ) , $\bar{\partial} \in \mathbb{R}\mathcal{C}(N)$ et $\bar{\partial}' \in \mathbb{R}\mathcal{C}(N')$ alors on n'a pas en général d'isomorphisme canonique $\text{Det}(\bar{\partial} \otimes \bar{\partial}') = \text{Det}(\bar{\partial}) \otimes \text{Det}(\bar{\partial}')$. En effet, en prenant N de rang 1, $N' = N^*$ et $\bar{\partial}' = \bar{\partial}^*$, l'action d'un élément de $(\Phi, \varphi) \in \mathbb{R}\text{Aut}(N)$ sur les orientations de $\text{Det}(N) \otimes \text{Det}(N^*)$ est triviale d'après la Proposition 4.4, alors que l'automorphisme induit sur $N \otimes N^* = \mathbb{C}$ est Φ_φ dont l'action sur les orientations de $\text{Det}(N \otimes N^*) = \text{Det}(\mathbb{C})$ est donnée par $\det(\varphi^*)$ d'après la Proposition 4.3.

Nous avons comme corollaire immédiat du Lemme 4.3 et de la Proposition 4.4 le résultat suivant.

Corollaire 4.1. — *Nous avons un isomorphisme canonique*

$$\text{Det}(T\Sigma_g)_{|\mathbb{R}J(\Sigma_g)} \cong \det(\mathcal{H}_1(\Sigma_g, \mathbb{R})_{+1}),$$

où $\text{Det}(T\Sigma_g)_{|\mathbb{R}J(\Sigma_g)}$ est le fibré sur $\mathbb{R}J(\Sigma_g)$ de fibre $H^0(\Sigma_g, T\Sigma_{g,J})_{+1} \otimes (\Lambda^{\max} H^1(\Sigma_g, T\Sigma_{g,J})_{+1})^*$ au-dessus de J , tel que pour tout $\varphi \in \mathbb{R}\text{Diff}^+(\Sigma_g)$, le diagramme

$$\begin{array}{ccc} \text{Det}(T\Sigma_g)_{|\mathbb{R}J(\Sigma_g)} & \longrightarrow & \det(\mathcal{H}_1(\Sigma_g, \mathbb{R})_{+1}) \\ \text{d}\varphi \downarrow & & \downarrow \varphi_* \\ \text{Det}(T\Sigma_g)_{|\mathbb{R}J(\Sigma_g)} & \longrightarrow & \det(\mathcal{H}_1(\Sigma_g, \mathbb{R})_{+1}) \end{array}$$

commute. \square

4.2.3. Espace de Teichmüller réel. — Afin de simplifier l'exposé, nous supposons dans ce paragraphe que les courbes considérées sont de genre au moins deux. Nous commençons par rappeler quelques faits concernant l'espace de Teichmüller réel associé à une courbe réelle (Σ_g, c_Σ) (voir en particulier [25] et [9]).

Le groupe $\text{Diff}(\Sigma_g)$ des difféomorphismes de Σ_g agit sur l'ensemble $J(\Sigma_g)$ des structures complexes sur Σ_g par tiré en arrière :

$$(*) \quad (\varphi, J) \in \text{Diff}(\Sigma_g) \times J(\Sigma_g) \mapsto \varphi^* J = s(\varphi) \text{d}\varphi^{-1} \circ J \circ \text{d}\varphi,$$

où $s(\varphi)$ vaut 1 lorsque $\varphi \in \text{Diff}^+(\Sigma_g)$ et -1 sinon.

Définition 4.1. — L'espace de Teichmüller $\mathcal{T}(\Sigma_g)$ associé à la surface compacte orientée Σ_g est le quotient de l'ensemble des structures complexes de Σ_g compatibles avec son orientation par l'action du sous-groupe $\text{Diff}_0(\Sigma_g)$ de $\text{Diff}(\Sigma_g)$ formé des difféomorphismes homotopes à l'identité,

$$\mathcal{T}(\Sigma_g) = J(\Sigma_g) / \text{Diff}_0(\Sigma_g).$$

L'espace de Teichmüller réel associé à la courbe réelle (Σ_g, c_Σ) est le quotient de $\mathbb{R}J(\Sigma_g)$ par l'action du sous-groupe $\mathbb{R}\text{Diff}_0(\Sigma_g)$ de $\text{Diff}_0(\Sigma_g)$ formé des difféomorphismes homotopes à l'identité qui commutent avec c_Σ ,

$$\mathcal{T}(\Sigma_g, c_\Sigma) = \mathbb{R}J(\Sigma_g) / \mathbb{R}\text{Diff}_0(\Sigma_g).$$

Lemme 4.5. — Soit $\varphi \in \text{Diff}_0(\Sigma_g)$. S'il existe $J \in \mathbb{R}J(\Sigma_g)$ telle que $\varphi^*J \in \mathbb{R}J(\Sigma_g)$, alors φ commute avec c_Σ .

Démonstration. — Comme $\varphi^*J \in \mathbb{R}J(\Sigma_g)$,

$$\begin{aligned} (\varphi \circ c_\Sigma \circ \varphi^{-1})^*J &= (\varphi^{-1})^*(c_\Sigma)^*(\varphi^*J) \\ &= (\varphi^{-1})^*\varphi^*J \\ &= J. \end{aligned}$$

Le difféomorphisme $c_\Sigma \circ \varphi \circ c_\Sigma \circ \varphi^{-1}$ est donc un automorphisme pour J . Il est de plus homotope à l'identité. Ainsi $c_\Sigma \circ \varphi \circ c_\Sigma \circ \varphi^{-1} = \text{id}$, et $c_\Sigma \circ \varphi = \varphi \circ c_\Sigma$. \square

Le Lemme 4.5 nous assure que l'inclusion $\mathbb{R}J(\Sigma_g) \rightarrow J(\Sigma_g)$ induit une injection de $\mathcal{T}(\Sigma_g, c_\Sigma)$ dans $\mathcal{T}(\Sigma_g)$. De plus, l'image de cette application est contenue dans le lieu fixe $\mathcal{T}(\Sigma_g)_{c_\Sigma} \subset \mathcal{T}(\Sigma_g)$ de l'action de c_Σ sur $\mathcal{T}(\Sigma)$ induite par $(*)$.

Proposition 4.5. — (Kravetz [19]) L'espace $\mathcal{T}(\Sigma_g, c_\Sigma)$ est homéomorphe à la boule unité ouverte d'un espace vectoriel réel normé de dimension $3g - 3$. (Earle [9]) L'injection $\mathcal{T}(\Sigma_g, c_\Sigma) \rightarrow \mathcal{T}(\Sigma_g)_{c_\Sigma}$ est un homéomorphisme.

L'espace de Teichmüller réel est donc contractile et hérite d'une structure de variété analytique réelle venant de celle de $\mathcal{T}(\Sigma_g)_{c_\Sigma}$. En particulier, l'espace de Teichmüller réel associé à une courbe réelle est toujours orientable.

D'autre part, l'action du groupe $\text{Diff}^+(\Sigma_g)$ (resp. $\mathbb{R}\text{Diff}^+(\Sigma_g)$) sur $J(\Sigma_g)$ (resp. sur $\mathbb{R}J(\Sigma_g)$) descend en une action du groupe des difféotopies (resp. du groupe des difféotopies réel) sur l'espace de Teichmüller (resp. réel).

Définition 4.2. — Le groupe $\Gamma(\Sigma_g)$ des difféotopies de Σ_g est l'ensemble des classes d'homotopie de difféomorphismes de Σ_g préservant l'orientation fixée,

$$\Gamma(\Sigma_g) = \text{Diff}^+(\Sigma_g) / \text{Diff}_0(\Sigma_g).$$

Le groupe $\Gamma(\Sigma_g, c_\Sigma)$ des difféotopies réel de (Σ_g, c_Σ) est l'ensemble des classes d'homotopie de difféomorphismes réels de (Σ_g, c_Σ) préservant l'orientation fixée,

$$\Gamma(\Sigma_g, c_\Sigma) = \mathbb{R}\text{Diff}^+(\Sigma_g) / \mathbb{R}\text{Diff}_0(\Sigma_g).$$

Nous avons à nouveau une action de c_Σ sur $\Gamma(\Sigma_g)$ par conjugaison. Notons $\Gamma(\Sigma_g)_{c_\Sigma}$ son lieu fixe.

Lemme 4.6. — *L'inclusion naturelle $\Gamma(\Sigma_g, c_\Sigma) \rightarrow \Gamma(\Sigma_g)$ a pour image $\Gamma(\Sigma_g)_{c_\Sigma}$.*

Démonstration. — Fixons un difféomorphisme $\varphi \in \Gamma(\Sigma_g)_{c_\Sigma}$ et montrons qu'il est homotope à un difféomorphisme réel. Choisissons une structure complexe $J \in \mathbb{R}J(\Sigma_g)$. Alors par définition, il existe $\psi \in \text{Diff}_0(\Sigma_g)$ tel que

$$c_\Sigma \circ \varphi \circ c_\Sigma = \varphi \circ \psi,$$

et

$$(c_\Sigma)^* \varphi^* J = (c_\Sigma)^* \varphi^* (c_\Sigma)^* J = \psi^* \varphi^* J.$$

Donc $\varphi^* J$ est un élément de $\mathcal{T}(\Sigma_g)_{c_\Sigma}$. D'après la Proposition 4.5, il existe un difféomorphisme γ homotope à l'identité tel que $\gamma^* \varphi^* J$ est réelle. Alors, le difféomorphisme $((\varphi \circ \gamma) \circ c_\Sigma) \circ (c_\Sigma \circ (\varphi \circ \gamma))^{-1}$ est un automorphisme pour la structure complexe J et est homotope à l'identité. Comme la surface Σ_g est de genre au moins deux, ce difféomorphisme est égal à l'identité. D'où $(\varphi \circ \gamma) \circ c_\Sigma = c_\Sigma \circ (\varphi \circ \gamma)$. Ainsi φ est homotope à $\varphi \circ \gamma$ qui est réel. \square

Remarquons avant de poursuivre que l'on pourrait aussi définir les groupes de difféotopies en considérant les difféomorphismes à isotopie près. Il n'est pas évident a priori que l'on obtienne les mêmes groupes. C'est l'objet de la Proposition 4.6.

Proposition 4.6 (Earle-Eells [10]). — *Les groupes $\text{Diff}_0(\Sigma_g)$ et $\mathbb{R}\text{Diff}_0(\Sigma_g)$ sont les composantes connexes de l'identité des groupes $\text{Diff}(\Sigma_g)$ et $\mathbb{R}\text{Diff}(\Sigma_g)$.*

Démonstration. — On rappelle simplement rapidement la preuve élégante que l'on trouve dans Earle-Eells [10]. Faisons le cas de $\mathbb{R}\text{Diff}_0(\Sigma_g)$. D'après la Proposition 4.5, le quotient $\mathcal{T}(\Sigma_g, c_\Sigma)$ est contractile. L'espace $\mathbb{R}J(\Sigma_g)$ étant lui aussi contractile (voir [30]), la suite exacte longue d'homotopie associée à la fibration $\mathbb{R}\text{Diff}_0(\Sigma_g) \hookrightarrow \mathbb{R}J(\Sigma_g) \rightarrow \mathcal{T}(\Sigma_g, c_\Sigma)$ donne l'annulation de tous les groupes d'homotopie de $\mathbb{R}\text{Diff}_0(\Sigma_g)$. Cet espace étant une variété de Fréchet, l'annulation de tous ses groupes d'homotopie nous assure qu'il est contractile. Comme il contient la composante connexe de l'identité dans $\mathbb{R}\text{Diff}(\Sigma_g)$, il y est égal. \square

Théorème 4.1. — *Soit (Σ_g, c_Σ) une courbe réelle de genre au moins deux. Le fibré des orientations de $\mathcal{T}(\Sigma_g, c_\Sigma)$ est canoniquement isomorphe au fibré trivial $\det(\mathcal{H}_1(\Sigma_g, \mathbb{R})_{+1})$.*

En particulier, l'action d'un élément φ de $\Gamma(\Sigma_g, c_\Sigma)$ sur les orientations de l'espace de Teichmüller réel associé à (Σ_g, c_Σ) est donnée par le signe du déterminant de l'application $\varphi_ : H_1(\Sigma_g, \mathbb{R})_{+1} \rightarrow H_1(\Sigma_g, \mathbb{R})_{+1}$.*

Commençons par décrire le fibré tangent à $\mathcal{T}(\Sigma_g, c_\Sigma)$.

Lemme 4.7. — *Le fibré tangent à $\mathcal{T}(\Sigma_g, c_\Sigma)$ est le fibré $\mathcal{H}^1(\Sigma_g, T\Sigma_g)_{-1}$ de fibre $H^1(\Sigma_g, T\Sigma_{g,J})_{-1}$ au-dessus de $J \in \mathcal{T}(\Sigma_g, c_\Sigma)$.*

Démonstration. — D'après [30], la fibre du tangent à $\mathbb{R}J(\Sigma_g)$ au point J est

$$\Gamma(\Sigma_g, \Lambda_j^{0,1}\Sigma_g \otimes T\Sigma_{g,J})_{-1} = \{J \in \Gamma(\Sigma_g, \text{End}(T\Sigma_g)) \mid \begin{aligned} J\dot{J} &= -\dot{J}J, \\ -dc_\Sigma \circ \dot{J} \circ dc_\Sigma &= \dot{J} \end{aligned}\}.$$

Il nous reste à voir quelle est l'action de l'algèbre de Lie de $\mathbb{R}Diff_0(\Sigma_g)$ sur cet espace. Prenons un chemin $\varphi_t \in \mathbb{R}Diff_0(\Sigma_g)$ tel que $\varphi_0 = \text{id}$ et $\frac{d\varphi_t}{dt}|_{t=0} = X \in \Gamma(\Sigma_g, T\Sigma_g)_{+1}$. Notons ∇^J la connexion de Levi-Civita pour une métrique associée à J . Dérivons en zéro le chemin φ_t^*J :

$$\begin{aligned} \frac{d(\varphi_t^*J)}{dt} \Big|_{t=0} &= \frac{d(d\varphi_t^{-1} \circ J \circ d\varphi_t)}{dt} \Big|_{t=0} \\ &= -(\nabla^J X) \circ J + J \circ (\nabla^J X) \\ &= J\bar{\partial}_{T\Sigma_{g,J}}X \\ &= \bar{\partial}_{T\Sigma_{g,J}}(JX), \end{aligned}$$

car ∇^J est sans torsion, $\nabla^J J = 0$ et $\bar{\partial}_{T\Sigma_{g,J}}$ est \mathbb{C} -linéaire. Or la multiplication par J est un isomorphisme entre $\Gamma(\Sigma_g, T\Sigma_g)_{+1}$ et $\Gamma(\Sigma_g, T\Sigma_g)_{-1}$. Ainsi, la fibre du tangent à $\mathcal{T}(\Sigma_g, c_\Sigma)$ est le quotient

$$\Gamma(\Sigma_g, \Lambda_j^{0,1}\Sigma_g \otimes T\Sigma_{g,J})_{-1} / \bar{\partial}_{T\Sigma_{g,J}}(\Gamma(\Sigma_g, T\Sigma_g)_{-1}) = H^1(\Sigma_g, T\Sigma_{g,J})_{-1}.$$

□

Démonstration du Théorème 4.1. — D'après le Lemme 4.7, on souhaite étudier l'action du groupe des difféotopies réel sur les orientations du fibré $\mathcal{H}^1(\Sigma_g, T\Sigma_g)_{-1}$ au-dessus de l'espace de Teichmüller réel. Or, la multiplication par J donne un isomorphisme entre $\mathcal{H}^1(\Sigma_g, T\Sigma_g)_{-1}$ et $\mathcal{H}^1(\Sigma_g, T\Sigma_g)_{+1}$. Le Théorème découle maintenant du Lemme 4.1. □

Le Théorème 4.1 permet de calculer comme corollaire immédiat la première classe de Stiefel-Whitney du quotient $\mathcal{T}(\Sigma_g, c_\Sigma)/\Gamma(\Sigma_g, c_\Sigma)$.

Définition 4.3. — *L'espace des modules $\mathcal{M}_{g,k,\varepsilon}$ des courbes de genre g admettant une involution anti-holomorphe dont la partie réelle est séparante (resp. non séparante) si $\varepsilon = 1$ (resp. si $\varepsilon = 0$) et a k composantes connexes est le quotient*

$$\mathcal{M}_{g,k,\varepsilon} = \mathcal{T}(\Sigma_g, c_\Sigma) / \Gamma(\Sigma_g, c_\Sigma),$$

où (Σ_g, c_Σ) est de type topologique (g, k, ε) .

Toutefois, l'action de $\Gamma(\Sigma_g, c_\Sigma)$ sur $\mathcal{T}(\Sigma_g, c_\Sigma)$ n'est pas libre, et le quotient a des singularités qui correspondent à des courbes ayant des automorphismes.

Proposition 4.7. — *Si g est strictement plus grand que trois alors l'ensemble des structures complexes sur (Σ_g, c_Σ) admettant au moins un automorphisme réel non trivial est de codimension au moins deux dans $\mathcal{T}(\Sigma_g, c_\Sigma)$.*

Démonstration. — On rappelle simplement rapidement le schéma de la preuve (pour plus de détails, on pourra lire Arbarello-Cornalba-Griffiths [1] Chapter XII, Proposition (2.5)).

Soit J est une structure complexe sur (Σ_g, c_Σ) admettant un automorphisme φ d'ordre premier $p > 1$. Alors, le groupe des automorphismes réels de J agit linéairement sur un voisinage de J dans $\mathcal{T}(\Sigma_g, c_\Sigma)$, et la dimension du sous-espace sur lequel φ se propage est égale à la dimension d de $H^1(\Sigma_g, T\Sigma_{g,J})_{-1}^\varphi$ qui est le sous espace vectoriel de $H^1(\Sigma_g, T\Sigma_{g,J})_{-1}$ formé des éléments φ -invariants. En notant g' le genre de la courbe Σ_g/φ et h le nombre de points ramifiés de la projection, on obtient

$$d = 3g' - 3 + h.$$

La formule de Riemann-Hurwitz donne aussi

$$3g - 3 - d = (p - 1)(3g' - 3) + \frac{1}{2}h(3p - 5).$$

On conclut en étudiant les différents cas selon le genre g' . □

Notons $\mathcal{M}_{g,k,\varepsilon}^*$ le sous-ensemble de $\mathcal{M}_{g,k,\varepsilon}$ formé des courbes sans automorphisme.

Corollaire 4.2. — *Pour $g \geq 4$, la première classe de Stiefel-Whitney de $\mathcal{M}_{g,k,\varepsilon}^*$ est donnée par*

$$w_1(\mathcal{M}_{g,k,\varepsilon}^*) = w_1(\mathcal{H}_1(\Sigma_g, \mathbb{R})_{+1}).$$

□

4.3. Automorphismes associés à un diviseur

Nous passons maintenant au cas général d'un fibré en droites complexes (N, c_N) muni d'une structure réelle sur (Σ_g, c_Σ) , de partie réelle non vide. Fixons un diviseur $D = \sum_i a_i x_i$, $a_i \in \mathbb{Z}$ et $x_i \in \Sigma_g$, invariant par c_Σ et tel que

- D est de degré $\deg(N)$ et
- pour chaque composante réelle $(\mathbb{R}\Sigma_g)_s$ de Σ_g , le diviseur $D|_{(\mathbb{R}\Sigma_g)_s} = \sum_{x_i \in (\mathbb{R}\Sigma_g)_s} a_i x_i$ est de la forme ax , où $x \in (\mathbb{R}\Sigma_g)_s$ et $a \in \{0, 1, 2\}$ et sa parité est donnée par $w_1(\mathbb{R}N)([\mathbb{R}\Sigma_g]_s)$.

On dira qu'un tel diviseur est compatible avec (N, c_N) . Notons que nous autorisons des points réels de multiplicité 2 car nous en aurons besoin dans le Corollaire 4.4.

Le diviseur D nous fournit des sections privilégiées de la projection $(\bar{\partial}, J) \in \mathbb{R}\mathcal{C}(N) \mapsto J \in \mathbb{R}J(\Sigma_g)$.

Définition 4.4. — *Une section $\bar{\partial}_D : J \in \mathbb{R}J(\Sigma_g) \mapsto (\bar{\partial}, J) \in \mathbb{R}\mathcal{C}(N)$ sera dite associée à D si pour chaque $J \in \mathbb{R}J(\Sigma_g)$ le fibré $(N, \bar{\partial}_{D,J})$ est isomorphe à $\mathcal{O}_{\Sigma_g, J}(D)$.*

Une section $\bar{\partial}_D$ associée à D induit un fibré en droites réelles sur $\mathbb{R}J(\Sigma_g)$ dont la fibre au-dessus de $J \in \mathbb{R}J(\Sigma_g)$ est l'ensemble des sections méromorphes réelles de $(N, c_N, \bar{\partial}_{D,J})$ ayant D pour diviseur. Comme $\mathbb{R}J(\Sigma_g)$ est contractile, ce fibré en droites est orientable. Un couple formé d'une section $\bar{\partial}_D$ associée à D et d'une orientation du fibré en droite induit sur $\mathbb{R}J(\Sigma_g)$ est appelé section polarisée associée à D , et on le notera $\bar{\partial}_D^+$.

Remarque 4.3. — Le quotient de $\mathbb{RC}(N)$ par l'action de $\mathbb{RGL}(N)$ est le groupe de Picard universel $\mathbb{RPic}_{w_1(\mathbb{R}N)}^{\deg(N)}(\Sigma_g)$, qui est un fibré principal sur $\mathbb{RJ}(\Sigma_g)$ dont le groupe est la Jacobienne de Σ_g . À un diviseur D compatible avec (N, c_N) est associée une section $\mathcal{O}_{\Sigma_g}(D) : \mathbb{RJ}(\Sigma_g) \rightarrow \mathbb{RPic}_{w_1(\mathbb{R}N)}^{\deg(N)}(\Sigma_g)$ de ce fibré. Le sous-ensemble $\mathbb{RC}_D(N)$ des éléments de $\mathbb{RC}(N)$ qui se projettent sur cette section forme un fibré principal sur $\mathbb{RJ}(\Sigma_g)$ de groupe $\mathbb{RGL}(N)/\mathbb{R}^*$. Nous avons donc la situation suivante

$$\begin{array}{ccccc} \mathbb{RC}_D(N) & \hookrightarrow & \mathbb{RC}(N) & \xrightarrow{\quad} & \mathbb{RPic}_{w_1(\mathbb{R}N)}^{\deg(N)}(\Sigma_g) \\ & \nwarrow & \searrow & \swarrow & \nearrow \\ & \bar{\partial}_D & \mathbb{RJ}(\Sigma_g) & \xleftarrow{\quad} & \mathcal{O}_{\Sigma_g}(D) \end{array}$$

Autrement dit, les sections associées à D sont les sections du fibré $\mathbb{RC}_D(N) \rightarrow \mathbb{RJ}(\Sigma_g)$. En particulier, pour chaque structure complexe $J \in \mathbb{RJ}(\Sigma_g)$, il existe un voisinage $J \in V \subset \mathbb{RJ}(\Sigma_g)$, des familles continues de coordonnées locales J' -holomorphes $(\zeta_{J',x_i})_{J' \in V}$ sur des voisinages disjoints $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ -équivariants U_{x_i} des x_i , et une famille continue d'isomorphismes entre $(N, \bar{\partial}_{D,J'}, c_N)_{J' \in V}$ et les fibrés en droites holomorphes réels définis comme le recollement de $(\Sigma_g \setminus \{x_i\}) \times \mathbb{C}$ et $U_{x_i} \times \mathbb{C}$ par les changements de cartes

$$\begin{array}{ccc} (\Sigma_g \setminus \{x_i\}) \cap U_{x_i} \times \mathbb{C} & \rightarrow & U_{x_i} \cap (\Sigma_g \setminus \{x_i\}) \times \mathbb{C} \\ (z, v) & \mapsto & (z, \zeta_{J',x_i}(z)^{a_i} v). \end{array}$$

De plus, nous pouvons décrire comment passer d'une section associée à D à une autre.

Lemme 4.8. — Si $\bar{\partial}_D$ et $\bar{\partial}'_D$ sont deux familles d'opérateurs de Cauchy-Riemann sur (N, c_N) associées au diviseur D , alors il existe une application continue $F : \mathbb{RJ}(\Sigma_g) \rightarrow \mathbb{RGL}(N)$ telle que pour tout J dans $\mathbb{RJ}(\Sigma_g)$ on a $\bar{\partial}_{D,J} = F_J^* \bar{\partial}'_{D,J}$. De plus, cette application est unique à multiplication par une fonction continue de $\mathbb{RJ}(\Sigma_g)$ dans \mathbb{R}^* près.

Si les familles d'opérateurs sont polarisées et que l'on impose que F préserve les polarisations, alors F est défini de façon unique à homotopie près.

Démonstration. — Le groupe $\mathbb{RGL}(N)/\mathbb{R}^*$ des automorphismes de N modulo les automorphismes constants agit librement sur $\mathbb{RC}(N)$. En effet, un élément de $\mathbb{RGL}(N) = \mathbb{RC}^\infty(\Sigma_g, \mathbb{C}^*)$ qui préserve un opérateur de Cauchy Riemann sur N est holomorphe, et est donc de la forme $v \in N \mapsto \lambda v \in N$, avec $\lambda \in \mathbb{R}^*$.

Par définition, pour chaque J dans $\mathbb{RJ}(\Sigma_g)$ il existe un voisinage V de J et une unique application continue $[F]$ de V dans $\mathbb{RGL}(N)/\mathbb{R}^*$ telle que pour tout J' dans V on a $\bar{\partial}_{D,J'} = [F]_{J'}^* \bar{\partial}'_{D,J'}$. Par unicité, $[F]$ est en fait définie sur tout $\mathbb{RJ}(\Sigma_g)$. Puis, comme $\mathbb{RJ}(\Sigma_g)$ est contractile $[F]$ admet un relevé dans $\mathbb{RGL}(N)$, c'est-à-dire une application continue $F : \mathbb{RJ}(\Sigma_g) \rightarrow \mathbb{RGL}(N)$ telle que pour tout J dans $\mathbb{RJ}(\Sigma_g)$ on a $\bar{\partial}_{D,J} = F_J^* \bar{\partial}'_{D,J}$.

Si les deux familles sont polarisées, alors soit F soit $-F$ préserve les polarisations, et deux familles d'automorphismes qui envoient une famille polarisée sur l'autre diffèrent d'une fonction continue sur $\mathbb{R}J(\Sigma_g)$ à valeurs dans \mathbb{R}_+^* . \square

On associe maintenant à un difféomorphisme $\varphi \in \mathbb{R}Diff^+(\Sigma_g, w_1(\mathbb{R}N))$ qui fixe globalement le diviseur D et à une section $\bar{\partial}_D^+$ polarisée associée à D un relevé $\Phi_{\bar{\partial}_D^+} \in \mathbb{R}Aut(N)$ de φ , bien défini à homotopie près.

Lemme 4.9. — *Pour tout difféomorphisme $\varphi \in \mathbb{R}Diff^+(\Sigma_g, w_1(\mathbb{R}N))$ tel que $\varphi_*D = D$ et toute section polarisée $\bar{\partial}_D^+$, il existe une application continue $\Phi_{\bar{\partial}_D^+} : \mathbb{R}J(\Sigma_g) \rightarrow \mathbb{R}Aut(N)$ telle que pour toute structure complexe J sur (Σ_g, c_Σ) , $\Phi_{\bar{\partial}_D^+, J}$ est un relevé de φ vérifiant*

$$\Phi_{\bar{\partial}_D^+, J}^*(\bar{\partial}_{D, J}^+) = \bar{\partial}_{D, \varphi^*J}^+.$$

De plus, deux tels relevés sont égaux à multiplication par une fonction continue à valeurs positives près.

D'autre part, si $\bar{\partial}_D'^+$ est une autre section polarisée associée à D , alors il existe une application continue $F : \mathbb{R}J(\Sigma_g) \rightarrow \mathbb{R}GL(N)$ telle que

$$\Phi_{\bar{\partial}_D'^+, J} = F_J^{-1} \circ \Phi_{\bar{\partial}_D^+, J} \circ F_{\varphi^*J}.$$

Démonstration. — On remarque que si $\Phi \in \mathbb{R}Aut(N)$ est un relevé de φ , alors il envoie la section polarisée $\bar{\partial}_D^+$ sur une autre section polarisée $\bar{\partial}_D'^+$. En effet, pour $J \in \mathbb{R}J(\Sigma_g)$, on peut prendre une section méromorphe s_D du fibré $(N, \bar{\partial}_{D, J})$ ayant D pour diviseur, et la section $\Phi^{-1}(s_D)$ est alors une section méromorphe de $(N, \Phi^*\bar{\partial}_{D, J})$ ayant $\varphi^*D = D$ pour diviseur. Ainsi $(N, \Phi^*\bar{\partial}_{D, J})$ est isomorphe à $\mathcal{O}_{\Sigma_g, \varphi^*J}(D)$, et $\Phi^*\bar{\partial}_D$ est bien associée à D .

Puis, d'après le Lemme 4.8, il existe une application continue $F : \mathbb{R}J(\Sigma_g) \rightarrow \mathbb{R}GL(N)$ telle que pour tout J dans $\mathbb{R}J(\Sigma_g)$ on a $\Phi^*\bar{\partial}_{D, J}^+ = (F_{\varphi^*J})^*\bar{\partial}_{D, \varphi^*J}^+$. L'application $\Phi \circ F_{\varphi^*J}$ vérifie bien l'énoncé.

L'unicité provient de l'affirmation analogue dans le Lemme 4.8. \square

Remarquons que comme $\mathbb{R}J(\Sigma_g)$ est contractile, le Lemme 4.9 nous donne en fait un moyen d'obtenir un relevé de φ associé au diviseur D tel que pour deux tels relevés l'un est homotope à un conjugué de l'autre. En particulier tous ces relevés de φ ont la même action sur les orientations du fibré $\text{Det}(N)$.

Définition 4.5. — *Soit $\varphi \in \mathbb{R}Diff^+(\Sigma_g, w_1(\mathbb{R}N))$ tel que $\varphi_*D = D$. On dira qu'un relevé Φ_D de φ est associé à D s'il existe une famille continue $\Phi_D : \mathbb{R}J(\Sigma_g) \rightarrow \mathbb{R}Aut(N)$ d'automorphismes de N relevant φ et préservant une section polarisée associée à D , telle que Φ_D soit homotope à tous les $\Phi_{D, J}$, pour $J \in \mathbb{R}J(\Sigma_g)$.*

Remarque 4.4. —

- Si l'on impose simplement à un relevé Φ_D de φ de préserver une section sans se soucier de sa polarisation, alors $-\Phi_D$ préserve encore une section associée à D . Toutefois, lorsque le degré de N vérifie $\deg(N) = g \pmod{2}$, Φ_D

- et $-\Phi_D$ n'ont pas la même action sur les orientations du fibré $\text{Det}(N)$. D'où l'importance de la polarisation dans notre définition.
- Plus précisément, le choix d'une polarisation induit par restriction une orientation sur chaque composante orientable de $\mathbb{R}N$. Ainsi, si Φ_D préserve une polarisation, en particulier Φ_D préserve les orientations des composantes de $\mathbb{R}N$ fixées.
 - Si le difféomorphisme φ est l'identité, alors les automorphismes Φ_D au-dessus de φ et associés à D sont tous homotopes à l'identité dans $\mathbb{R}GL(N)$. En particulier, tous ces automorphismes préservent les orientations du fibré $\text{Det}(N)$.
 - L'automorphisme $\Phi_\varphi \in \mathbb{R}Aut(\mathbb{C})$ défini au §4.2.1 est un relevé de φ associé au diviseur 0.

4.4. Action d'un automorphisme associé à un diviseur

4.4.1. Énoncé. —

Lemme 4.10. — *Soit (N, c_N) un fibré en droites complexes sur (Σ_g, c_Σ) de partie réelle non vide. Soit D un diviseur associé à (N, c_N) et $\varphi \in \mathbb{R}Diff_D^+(\Sigma_g, w_1(\mathbb{R}N))$. Deux relevés Φ_D et Φ'_D de φ associés à D ont la même action sur les orientations du fibré $\text{Det}(N)$.*

Démonstration. — C'est une conséquence immédiate du Lemme 4.9. □

Un difféomorphisme $\varphi \in \mathbb{R}Diff_D^+(\Sigma_g, w_1(\mathbb{R}N))$ induit une permutation $\varphi|_D$ sur les points du support de D comptés avec multiplicités. Par exemple si φ échange un point z avec son conjugué alors $\varphi|_{2z+2\bar{z}}$ est le produit de deux transpositions et sa signature vaut un. Nous noterons de plus σ_φ^D la permutation induite par φ sur les orientations des composantes de $\mathbb{R}\Sigma_g$ qui contiennent des points de D . Nous noterons $\varepsilon_D(\varphi) = \varepsilon(\sigma_\varphi^D)\varepsilon(\varphi|_D)\det(\varphi^*)$.

Théorème 4.2. — *Soit (N, c_N) un fibré en droites complexes sur (Σ_g, c_Σ) de partie réelle non vide. Soit D un diviseur associé à $(\det(N), c_{\det(N)})$ et $\varphi \in \mathbb{R}Diff_D^+(\Sigma_g, w_1(\mathbb{R}N))$. Le signe de l'action d'un relevé $\Phi_D \in \mathbb{R}Aut_D(N)$ de φ associé à D sur les orientations du fibré $\text{Det}(N)$ est donné par $\varepsilon_D(\varphi)$.*

Si $\Phi \in \mathbb{R}Aut_D(N)$ est un relevé quelconque de φ , alors le signe de son action sur les orientations de $\text{Det}(N)$ est

$$(-1)^{s_N(\det(\Phi \circ \Phi_D^{-1}))} \varepsilon_{\mathfrak{p}^+}(\Phi) \varepsilon_D(\varphi).$$

La démonstration du Théorème 4.2 occupe tout le §4.4. Notons tout de même que la deuxième partie du Théorème se déduit de la première ainsi que des Théorèmes 2.1 et 3.5 et de la Proposition 4.2.

Remarque 4.5. —

- Soulignons qu'étant donné un élément $(\Phi, \varphi) \in \mathbb{R}Aut(N)$ on peut toujours l'isotoper sur un élément de $\mathbb{R}Aut_D(N)$. Toutefois, ce dernier automorphisme n'est en général pas unique à homotopie près dans $\mathbb{R}Aut_D(N)$; plus précisément, il se peut que l'on obtienne deux éléments de $\mathbb{R}Aut_D(N)$ qui se projettent sur deux difféomorphismes de $\mathbb{R}Diff_D^+(\Sigma_g, w_1(\mathbb{R}N))$ qui ne sont pas homotopes dans $\mathbb{R}Diff_D^+(\Sigma_g, w_1(\mathbb{R}N))$. Or, le signe ε_D donné dans le Théorème 4.2 dépend de la classe d'isotopie du difféomorphisme dans $\mathbb{R}Diff_D^+(\Sigma_g, w_1(\mathbb{R}N))$. Ainsi, il est possible que deux relevés associés à D de deux éléments distincts de $\mathbb{R}Diff_D^+(\Sigma_g, w_1(\mathbb{R}N))$ ne soient pas homotopes dans $\mathbb{R}Aut(N)$ même si les difféomorphismes sous-jacents sont isotopes dans $\mathbb{R}Diff^+(\Sigma_g, w_1(\mathbb{R}N))$.

Par exemple, si la courbe (Σ_g, c_Σ) n'est pas séparante et que le diviseur D contient une paire de points complexes conjugués apparaissant avec une multiplicité impaire, alors on peut isotoper dans $\mathbb{R}Diff^+(\Sigma_g, w_1(\mathbb{R}N))$ un difféomorphisme φ préservant D et fixant cette paire de points sur un difféomorphisme ψ préservant à nouveau D mais échangeant les points. On voit alors que Φ_D relevant φ et Ψ_D relevant ψ n'ont pas la même action sur les orientations de $\text{Det}(N)$.

Ceci pose problème pour prolonger le résultat du Théorème 4.2 sur le groupe $\mathbb{R}Aut_D(N)$ à tout $\mathbb{R}Aut(N)$.

- Au §3, nous avons introduit l'action d'un automorphisme f au-dessus de l'identité sur les structures *Spin* réelles de (Σ_g, c_Σ) en le considérant comme une section du fibré canoniquement trivial $N \otimes N^*$. Si l'on considère maintenant un automorphisme $(\Phi, \varphi) \in \mathbb{R}Aut(N)$, celui-ci correspond à une section du fibré $(\varphi^*N) \otimes N^*$ qui n'est en général pas canoniquement trivial. Trivialiser ce fibré revient d'ailleurs à choisir un automorphisme précis de N au-dessus de φ . Il semble donc qu'un automorphisme quelconque n'agisse en général pas naturellement sur les structures *Spin* réelles sur (Σ_g, c_Σ) . Ainsi, il paraît difficile de prolonger le signe défini au §3 sur tout $\mathbb{R}Aut(N)$ comme nous pouvons le faire pour ε_{p^\pm} . Cette remarque est à rapprocher du fait suivant. Pour exprimer l'action d'un automorphisme au-dessus de l'identité sur les orientations du fibré $\text{Det}(N)$, nous avons « scindé » son action en deux parties : nous avons en fait scindé la suite exacte (2) du Lemme 1.2 afin de décomposer un automorphisme au-dessus de l'identité en une partie de déterminant 1 et en une partie agissant trivialement sur les structures Pin^\pm . Nous voulons maintenant faire de même avec les éléments de $\mathbb{R}Aut(N)$. Or, la suite exacte (1) du Lemme 1.2 n'est en général pas scindée. Ainsi, si nous pouvons imposer à un relevé $\Phi \in \mathbb{R}Aut(N)$ d'un difféomorphisme $\varphi \in \mathbb{R}Diff^+(\Sigma_g, w_1(\mathbb{R}N))$ d'agir trivialement sur les structures Pin^\pm afin d'éliminer du calcul du signe de son action la contribution déjà étudiée des éléments de $\mathbb{R}SL(N)$, nous ne pouvons pas en général éliminer la contribution des éléments de $\mathbb{R}GL(N)$. En nous restreignant aux sous-groupes $\mathbb{R}Aut_D(N)$ de $\mathbb{R}Aut(N)$, c'est ce que nous parvenons à faire.

4.4.2. Étude de l'action des automorphismes associés à un diviseur. —

Nous démontrons maintenant le Théorème 4.2. Considérons un fibré en droites complexes (N, c_N) muni d'une structure réelle sur (Σ_g, c_Σ) , que l'on suppose de partie réelle non vide. La démonstration du Théorème 4.2 consiste à se ramener au cas déjà traité du fibré trivial sur la courbe (voir §4.2.1) au moyen de transformations élémentaires négatives (voir §3.2.3.2). Fixons pour cela une structure complexe $J \in \mathbb{R}J(\Sigma_g)$. Prenons un opérateur de Cauchy-Riemann réel $\bar{\partial} \in \mathbb{R}\mathcal{C}_J(N)$. Notons \mathcal{N} le faisceau des sections holomorphes de $(N, \bar{\partial})$.

Soit $D' = \sum_{x_i \in \mathbb{R}\Sigma_g} a_i x_i + \sum_{z_j \in \Sigma_g} b_j (z_j + \bar{z}_j)$ un diviseur effectif associé à un fibré en

droites complexes muni d'une structure réelle. On notera \vec{D}' le diviseur D' dont on a numéroté les points du support de la façon suivante : $x_1, \dots, x_r, z_1, \bar{z}_1, \dots, z_l, \bar{z}_l$. On peut définir de manière évidente la transformation élémentaire réelle négative en \vec{D}' de \mathcal{N} , que l'on notera $\mathcal{N}_{-\vec{D}'}$, en effectuant dans l'ordre donné par la numérotation fixée les transformations élémentaires en chacun des points de D' . On notera aussi

$$\begin{aligned} \Delta_{b_j z_j} &= \mathbb{R} \bigoplus_{m=0}^{b_j-1} \left((T_{z_j}^* \Sigma_g)^m \otimes N_{z_j} \oplus (T_{\bar{z}_j}^* \Sigma_g)^m \otimes N_{\bar{z}_j} \right) \\ \mathbb{R} N_{a_i x_i} &= \bigoplus_{m=0}^{a_i-1} (T_{x_i}^* \mathbb{R}\Sigma_g)^m \otimes \mathbb{R} N_{x_i} \\ \text{et } N_{|\vec{D}'} &= \bigoplus_{i=1}^r \mathbb{R} N_{a_i x_i} \bigoplus_{j=1}^l \Delta_{b_j z_j}. \end{aligned}$$

Munis de cet outil, nous pouvons démontrer la Proposition suivante qui affirme que les automorphismes associés à des diviseurs se comportent bien lors de transformations élémentaires réelles négatives.

Proposition 4.8. — *Soit (N, c_N) un fibré en droites complexes muni d'une structure réelle sur (Σ_g, c_Σ) , que l'on suppose de partie réelle non vide. Soit D un diviseur associé à (N, c_N) et D' un diviseur effectif invariant par c_Σ dont les points réels sont de multiplicités 0, 1 ou 2. Soit enfin $\varphi \in \mathbb{R} \text{Diff}^+(\Sigma_g, w_1(\mathbb{R}N))$ tel que $\varphi_* D = D$ et $\varphi_* D' = D'$, et $\Phi_D \in \mathbb{R} \text{Aut}(N)$ un relevé de φ associé au diviseur D . Pour toute numérotation \vec{D}' de D' , il existe un fibré en droites complexes $(N', c_{N'})$ et un automorphisme $\Phi_{D-D'} \in \mathbb{R} \text{Aut}(N')$ au-dessus de φ tels que*

- $D - D'$ est un diviseur associé à $(N', c_{N'})$,
- $\Phi_{D-D'}$ est associé à $D - D'$,
- le signe de l'action de $\Phi_{D-D'}$ sur les orientations du fibré $\text{Det}(N')$ est le produit des signes de l'action de Φ_D sur les orientations de $\text{Det}(N)$ et de son action sur $\det(N_{|\vec{D}'})$.

Démonstration. — Fixons $\bar{\partial}_D^\pm$ une section polarisée associée à D et une structure complexe $J_0 \in \mathbb{R}J(\Sigma_g)$ telle qu'il existe $\Psi_D : \mathbb{R}J(\Sigma_g) \rightarrow \mathbb{R} \text{Aut}(N)$ associée à $\bar{\partial}_D^\pm$ avec $\Psi_{D, J_0} = \Phi_D$. Choisissons une numérotation \vec{D}' de D' .

On effectue la transformation élémentaire négative en $\vec{D'}$ pour chaque $\vec{\partial}_{D,J}$ pour obtenir une famille continue de fibrés en droites holomorphes $(N_{-\vec{D'},J}, \vec{\partial}_{D-D',J})_{J \in \mathbb{R}J(\Sigma_g)}$. Remarquons aussi que par construction, les opérateurs de Cauchy-Riemann $\vec{\partial}_{D-D',J}$ sont associés à $D - D'$ et sont polarisés. Comme $\mathbb{R}J(\Sigma_g)$ est contractile, il existe une famille continue d'isomorphismes de fibrés en droites complexes $F_J : N_{-\vec{D'},J_0} \rightarrow N_{-\vec{D'},J}$ bien définie à homotopie près. On peut de plus supposer que F_{J_0} est l'identité. En tirant en arrière les opérateurs polarisés $\vec{\partial}_{D-D',J}$, on obtient une section polarisée $\vec{\partial}_{D-D'}^+$ associée à $D - D'$ sur $N_{-\vec{D'},J_0}$.

Notons que les automorphismes Ψ_D induisent par ce procédé une famille d'automorphisme $\Psi_{D-D'} : \mathbb{R}J(\Sigma_g) \rightarrow \mathbb{R}Aut(N_{-\vec{D'},J_0})$ qui est associée à $D - D'$. De plus, d'après les Lemme 3.14, 3.15 et 3.16, on a un diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccc} \text{Det}(\vec{\partial}_{D,J_0}) & \xlongequal{\quad} & \text{Det}(\vec{\partial}_{D-D',J_0}) \otimes \det(N_{|\vec{D'}}) \\ \Phi_D \downarrow & & \downarrow \Psi_{D-D',J_0} \otimes \Phi_D \\ \text{Det}(\vec{\partial}_{D,\varphi^*J_0}) & \xlongequal{\quad} & \text{Det}(\vec{\partial}_{D-D',\varphi^*J_0}) \otimes \det(N_{|\vec{D'}}). \end{array}$$

Ainsi, le signe de l'action de Ψ_{D-D',J_0} sur les orientations du fibré $\text{Det}(N_{-\vec{D'},J_0})$ est le produit des signes de l'action de Φ_D sur les orientations de $\text{Det}(N)$ et de son action sur $\det(N_{|\vec{D'}})$. \square

Lemme 4.11. — *Sous les mêmes hypothèses que la Proposition 4.8, le signe de l'action de Φ_D sur les orientations de $\det(N_{|\vec{D'}})$ est égal à $\varepsilon(\varphi_{|D'})\varepsilon(\sigma_\varphi^{D'})$.*

Démonstration. — Notons $\vec{D'} = \sum_{i=1}^r a_i x_i + \sum_{j=1}^l b_j (z_j + \bar{z}_j)$. Remarquons que la signature $\varepsilon(\varphi_{|D'})$ s'écrit comme le produit $\varepsilon(\varphi_{|D'_{\mathbb{R}\Sigma_g}})\varepsilon(\varphi_{|D'-D'_{\mathbb{R}\Sigma_g}})$, de même que le signe de l'action de Φ_D sur les orientations de $\det(N_{|\vec{D'}})$ se décompose en le produit du signe de son action sur les orientations de $\det(N_{|\vec{D'_{\mathbb{R}\Sigma_g}}}) = \det(\bigoplus_{i=1}^r \mathbb{R}N_{a_i x_i})$ et sur les orientations de $\det(N_{|\vec{D'-D'_{\mathbb{R}\Sigma_g}}}) = \det(\bigoplus_{j=1}^l \Delta_{b_j z_j})$.

Pour le premier signe on peut procéder de façon analogue au Lemme 4.1 dont on reprend les notations : on décompose $\varphi_{|D'_{\mathbb{R}\Sigma_g}}$ en produit de cycles disjoints c_i de longueur $l(c_i)$. On prend ensuite x_i dans le support d'un cycle c_i et on choisit un vecteur non nul $e \in \mathbb{R}N_{x_i}$. Supposons tout d'abord que la multiplicité de x_i

est un. On a une orientation de $\det(\bigoplus_{j=0}^{l(c_i)-1} \mathbb{R}N_{\varphi^j(x_i)})$ donnée par

$$e \wedge \Phi_D(e) \wedge \dots \wedge \Phi_D^{l(c_i)-1}(e).$$

L'image par Φ_D de cette orientation est égale à

$$(-1)^{l(c_i)-1} \Phi_D^{l(c_i)}(e) \wedge \Phi_D(e) \wedge \dots \wedge \Phi_D^{l(c_i)-1}(e).$$

Choisissons une orientation de $(\mathbb{R}\Sigma_g)_i$ et trivialisons $\mathbb{R}N$ au voisinage de x_i de telle sorte qu'une polarisation soit donnée par une fonction qui est négative à gauche de x_i et positive à droite. Alors, si $\varphi^{l(c_i)}$ préserve les orientations de $(\mathbb{R}\Sigma_g)_i$, on a $\Phi_D^{l(c_i)}(e) = \lambda e$, avec $\lambda > 0$ car Φ_D préserve une polarisation. Dans le cas contraire on a $\Phi_D^{l(c_i)}(e) = \lambda e$, avec $\lambda < 0$. Supposons maintenant que la multiplicité de x_i est deux. Fixons un vecteur non nul $t \in T_{x_i}^* \mathbb{R}\Sigma_g$. Une orientation

de $\det(\bigoplus_{j=0}^{l(c_i)-1} \mathbb{R}N_{2\varphi^j(x_i)})$ est donnée par

$$(e \wedge t \otimes e) \wedge (\Phi_D(e) \wedge d\varphi(t) \otimes \Phi_D(e)) \wedge \dots \wedge (\Phi_D^{l(c_i)-1}(e) \wedge (d\varphi)^{l(c_i)-1}(t) \otimes \Phi_D^{l(c_i)-1}(e)).$$

L'image par Φ_D de cette orientation est égale à

$$\begin{aligned} & (\Phi_D^{l(c_i)}(e) \wedge (d\varphi)^{l(c_i)}(t) \otimes \Phi_D^{l(c_i)}(e)) \wedge (\Phi_D(e) \wedge d\varphi(t) \otimes \Phi_D(e)) \wedge \dots \\ & \wedge (\Phi_D^{l(c_i)-1}(e) \wedge (d\varphi)^{l(c_i)-1}(t) \otimes \Phi_D^{l(c_i)-1}(e)). \end{aligned}$$

Dans ce cas, on obtient la même orientation si et seulement si $(d\varphi)^{l(c_i)}(t) = \lambda t$ avec $\lambda > 0$.

En faisant le produit de ces actions sur tous les cycles on obtient le signe de l'action de Φ_D sur les orientations de $\det(\bigoplus_{c_i} \bigoplus_{j=0}^{l(c_i)-1} \mathbb{R}N_{a_i\varphi^j(x_i)})$ donné par

$$\prod_{i|a_i=1} (-1)^{l(c_i)-1} s_\varphi(c_i) \prod_{i|a_i=2} s_\varphi(c_i) = \varepsilon(\varphi|_{D'_{\mathbb{R}\Sigma_g}}) \varepsilon(\sigma_\varphi^{D'}).$$

Enfin, l'automorphisme Φ_D restreint à $N_{\overrightarrow{D'_{\mathbb{R}\Sigma_g}}}$ est obtenu en conjuguant Φ_D

restreint à $\bigoplus_{c_i} \bigoplus_{j=0}^{l(c_i)-1} \mathbb{R}N_{a_i\varphi^j(x_i)}$ avec la matrice de permutation envoyant la numérotation donnée par $\overrightarrow{D'_{\mathbb{R}\Sigma_g}}$ sur la numérotation donnée par la décomposition en cycles de $\varphi|_{D'_{\mathbb{R}\Sigma_g}}$. Donc le signe de l'action de Φ_D sur les orientations de $\det(N_{\overrightarrow{D'_{\mathbb{R}\Sigma_g}}})$ est encore $\varepsilon(\varphi|_{D'_{\mathbb{R}\Sigma_g}}) \varepsilon(\sigma_\varphi^{D'})$.

Pour le second signe, on remarque que le choix de la numérotation de $D' - D'_{\mathbb{R}\Sigma_g}$ induit une orientation sur $\det(N_{\overrightarrow{|D' - D'_{\mathbb{R}\Sigma_g}}})$ venant des l'orientation complexe de N aux points z_j . De plus, si φ ne fait qu'échanger un point avec son conjugué, alors Φ_D renverse l'orientation de $\det(N_{\overrightarrow{|D' - D'_{\mathbb{R}\Sigma_g}}})$ si et seulement si ce point apparaît avec une multiplicité impaire dans D' . En raisonnant à nouveau comme dans le Lemme 4.1 on voit que si l'on compte les multiplicités des points complexes conjugués de D' , la signature de $\varphi|_{D' - D'_{\mathbb{R}\Sigma_g}}$ est égale au signe de l'action de Φ_D sur les orientations de $\det(N_{\overrightarrow{|D' - D'_{\mathbb{R}\Sigma_g}}})$. \square

Démonstration du Théorème 4.2. — Écrivons D sous la forme $D = D^+ - D^-$ où D^+ et D^- sont effectifs et à support inclus dans le support de D . D'après la Proposition 4.8 appliquée à Φ_D et à une numérotation arbitraire $\overrightarrow{D^+}$ de D^+ , nous avons un fibré en droites complexes $(N', c_{N'})$ et un automorphisme $\Phi_{-D^-} \in$

$\mathbb{R}Aut(N')$ associé à $-D^-$ tel que le signe de l'action de Φ_{-D^-} sur les orientations du fibré $\text{Det}(N')$ est le produit des signes de l'action de Φ_D sur les orientations de $\text{Det}(N)$ et de son action sur $\det(N_{|\overrightarrow{D^+}})$.

Appliquons une nouvelle fois la Proposition 4.8 à l'automorphisme $\Phi_\varphi \in \mathbb{R}Aut(\mathbb{C})$ et au diviseur numéroté $\overrightarrow{D^+}$. Nous obtenons un fibré en droites complexes $(N'', c_{N''})$ et un automorphisme $\Phi'_{-D^-} \in \mathbb{R}Aut(N'')$ associé à $-D^-$ tel que le signe de l'action de Φ'_{-D^-} sur les orientations du fibré $\text{Det}(N'')$ est le produit des signes de l'action de Φ_φ sur les orientations de $\text{Det}(\mathbb{C})$ et de son action sur $\det(\mathbb{C}_{|\overrightarrow{D^+}})$. Ce dernier signe est égal à $\varepsilon(\varphi_{|D^-})$.

Prenons un isomorphisme $f : (N', c_{N'}) \rightarrow (N'', c_{N''})$. Alors $f \circ \Phi'_{-D^-} \circ f^{-1}$ est un automorphisme de N' associé à $-D^-$. Ainsi les signes des actions de Φ_{-D^-} et de Φ'_{-D^-} sont les mêmes. D'après la Proposition 4.3, le signe de Φ_D est donc donné par le produit de $\det(\varphi^*)$ avec $\varepsilon(\varphi_{|D^-})$ et avec le signe de l'action de Φ_D sur $\det(N_{|\overrightarrow{D^+}})$. D'après le Lemme 4.11, ce dernier signe est égal à $\varepsilon(\varphi_{|D^+})\varepsilon(\sigma_\varphi^D)$, ce qui conclut la démonstration. \square

4.4.3. Deux cas particuliers. — Nous précisons l'énoncé du Théorème 4.2 dans deux cas particuliers : lorsque la courbe (Σ_g, c_Σ) est séparante puis lorsque la partie réelle du fibré (N, c_N) est orientable. Nous retrouverons ces deux cas au §5.

Un automorphisme $\Phi \in \mathbb{R}Aut(N)$ induit une permutation Φ_o des orientations des composantes orientables de $\mathbb{R}N$. D'autre part, un difféomorphisme $\varphi \in \mathbb{R}Diff^+(\Sigma_g, w_1(\mathbb{R}N))$ d'une courbe (Σ_g, c_Σ) séparante induit une transposition $\sigma_\varphi^{\mathbb{R}\Sigma_g}$ sur les deux orientations complexes de $\mathbb{R}\Sigma_g$, et une permutation $\varphi_{|\mathbb{R}\Sigma_g}^-$ des composantes connexes de $\mathbb{R}\Sigma_g$ sur lesquelles $\mathbb{R}N$ n'est pas orientable.

Corollaire 4.3. — *Soit (N, c_N) un fibré vectoriel complexe sur (Σ_g, c_Σ) que l'on suppose séparante. Soit $\varphi \in \mathbb{R}Diff^+(\Sigma_g, w_1(\mathbb{R}N))$ et $\Phi \in \mathbb{R}Aut(N)$ un relevé de φ . Le signe de l'action de Φ sur les orientations du fibré $\text{Det}(N)$ est donné par*

$$\varepsilon_{p^+}(\Phi)\varepsilon(\Phi_o)\varepsilon_N(\varphi),$$

où $\varepsilon_N(\varphi) = \varepsilon(\sigma_\varphi^{\mathbb{R}\Sigma_g})^{\frac{\deg(N)+k_-}{2}}\varepsilon(\varphi_{|\mathbb{R}\Sigma_g}^-)\det(\varphi^*)^{\text{rg}(N)}$ ne dépend que de φ et de (N, c_N) .

Démonstration. — Il suffit de traiter le cas du rang 1, pour conclure ensuite comme dans la Remarque 4.1 du §4.2.1. Nous supposons donc que N est un fibré en droites.

Prenons un diviseur D compatible avec (N, c_N) s'écrivant $D = \sum_{x_i \in D_{|\mathbb{R}\Sigma_g}} x_i + \frac{\deg(N) - k_-}{2}(z + \bar{z})$ et un difféomorphisme $\varphi' \in \mathbb{R}Diff^+(\Sigma_g, w_1(\mathbb{R}N))$ vérifiant $\varphi'_*D = D$. Commençons par vérifier le résultat pour un automorphisme Φ_D , relevé de φ' associé à un diviseur D .

Comme (Σ_g, c_Σ) est séparante, deux cas se présentent. Soit φ' préserve les orientations complexes de $\mathbb{R}\Sigma_g$ et alors la permutation $\sigma_{\varphi'}^D$ induite par φ' sur les orientations des composantes de $\mathbb{R}\Sigma_g$ sur lesquelles $\mathbb{R}N$ n'est pas orientable est de signature 1 car ses cycles viennent par paires de même longueur. Soit φ' échange

les orientations complexes de $\mathbb{R}\Sigma_g$ et alors on vérifie que la signature de $\sigma_{\varphi'}^D$ vaut $(-1)^{k-}$. Nous avons donc $\varepsilon(\sigma_{\varphi'}^D) = \varepsilon(\sigma_{\varphi'}^{\mathbb{R}\Sigma_g})^{k-}$. De plus, la permutation $\varphi'|_D$ induite par φ' sur les points de D comptés avec multiplicité se décompose en un produit d'une permutation dont le support est dans $\mathbb{R}\Sigma_g$ et d'une permutation dont le support est constitué des points complexes conjugués de D . Nous avons alors $\varepsilon(\varphi'|_D) = \varepsilon((\varphi')|_{\mathbb{R}\Sigma_g}) \times \varepsilon(\sigma_{\varphi'}^{\mathbb{R}\Sigma_g})^{\frac{\deg(N)-k-}{2}}$. Ainsi $\sigma_D(\varphi') = \sigma_N(\varphi')$. Enfin, comme nous l'avons écrit dans la Remarque 4.4, une polarisation induit une orientation pour chaque composante orientable de $\mathbb{R}N$. Ainsi $\varepsilon(\Phi_{D,o}) = 1$ car Φ_D préserve une polarisation. D'après le Théorème 4.2 nous avons bien le résultat pour Φ_D .

Prenons maintenant un $\Phi \in \mathbb{R}Aut(N)$ quelconque relevant $\varphi \in \mathbb{R}Diff^+(\Sigma_g, w_1(\mathbb{R}N))$. Comme tous les termes dans l'énoncé sont invariants par homotopie, on peut homotoper Φ pour supposer que $\varphi_*D = D$ pour un D s'écrivant comme celui ci-dessus. En choisissant un relevé Φ_D de φ associé à D , on remarque que $\Phi = (\Phi \circ (\Phi_D)^{-1}) \circ \Phi_D$. D'après le Corollaire 3.1 le signe de l'action de $(\Phi \circ (\Phi_D)^{-1})$ est donné par $\varepsilon((\Phi \circ (\Phi_D)^{-1})_o)$. En multipliant avec le signe pour Φ_D , on retrouve le résultat voulu. \square

Ainsi, lorsque la courbe est séparante, on peut prolonger les morphismes donnés dans le diagramme (*) de l'introduction à tout $\mathbb{R}Aut(N)$.

Lorsque la courbe n'est pas séparante, nous ne trouvons pas de résultat aussi général que le Corollaire 4.3. Nous pouvons toutefois préciser le Théorème 4.2. Nous utilisons pour cela des structures *Spin* non plus seulement associées à la surface Σ_g mais à un fibré vectoriel complexe muni d'une structure réelle (N, c_N) (qui est supposé de degré pair). Les définitions sont les mêmes qu'au §3.1.2, mais nous insistons sur quelques points. Tout d'abord, nous n'avons plus de notion de forme quadratique associée à une structure *Spin* (donc plus d'invariant d'Arf). D'autre part, si on a encore une bijection entre les structures *Spin* sur N (muni d'une structure holomorphe) et les classes d'isomorphisme de racines carrées de son fibré déterminant $\det(N)$ (voir [2]), celle-ci dépend de la structure holomorphe sur N . Ainsi lorsque nous parlerons d'une structure *Spin* sur N comme d'une racine carrée du fibré déterminant, nous ferons attention à préciser l'opérateur de Cauchy-Riemann sur N considéré.

Enfin, comme nous considérerons des structures *Spin* réelles sur (N, c_N) (lorsque $w_1(\mathbb{R}N) = 0$), remarquons qu'une telle structure donnée par un fibré en droite holomorphe L induit une semi-orientation sur le fibré $\mathbb{R}N$; c'est-à-dire que si nous fixons une orientation sur une des composantes de $\mathbb{R}N$, toutes les autres sont automatiquement orientées (voir [8]). De plus, comme nous supposons toujours que $\mathbb{R}\Sigma_g$ est non vide, la structure réelle $c_{\det(N)}$ se relève en une structure réelle c_L sur L unique à multiplication par i près. Le choix d'un tel relevé fixe une orientation sur $\mathbb{R}N$, et l'autre relevé induit l'autre orientation. Si un automorphisme $\Phi \in \mathbb{R}Aut(N)$ préserve une structure *Spin* réelle ξ sur N , alors Φ induit une permutation $\Phi_{o,\xi}$ sur les semi-orientations associées à ξ .

Par ailleurs, la première classe de Stiefel-Whitney d'une structure *Spin* réelle est toujours bien définie et ne dépend pas de la structure holomorphe choisie sur N .

Corollaire 4.4. — Soit (N, c_N) un fibré vectoriel complexe sur une courbe (Σ_g, c_Σ) de partie réelle non vide. Supposons de plus que le degré de N est pair et que la première classe de Stiefel Whitney de $\mathbb{R}N$ est nulle. Soit $\varphi \in \mathbb{R}Diff^+(\Sigma_g)$ et $\Phi \in \mathbb{R}Aut(N)$ un relevé de φ qui préserve une structure *Spin* réelle ξ sur N de première classe de Stiefel-Whitney $w \in H^1(\mathbb{R}\Sigma_g, \mathbb{Z}/2\mathbb{Z})$. Le signe de l'action de Φ sur les orientations du fibré $\text{Det}(N)$ est donné par

$$\varepsilon_{\mathfrak{p}^\pm}(\Phi) \varepsilon(\Phi_{o, \xi})^{1-g} \varepsilon(\sigma_\varphi^w) \det(\varphi^*)^{\text{rg}(N)},$$

où σ_φ^w est la permutation induite par φ sur l'ensemble des orientations des composantes de $\mathbb{R}\Sigma_g$ sur lesquelles w est non nulle.

Démonstration. — La démonstration est analogue à celle du Corollaire 4.3 et nous supposons à nouveau que N est de rang 1. Fixons un point x_i sur chaque composante de $\mathbb{R}\Sigma_g$ sur laquelle w est non nulle et prenons un diviseur D associé à N de la forme $D = \sum_{i=1}^l 2x_i + 2 \frac{\deg(N) - 2l}{4} (z + \bar{z})$ et un difféomorphisme

$\varphi' \in \mathbb{R}Diff^+(\Sigma_g)$ tel que $\varphi'_* D = D$. Fixons une section polarisée $\bar{\partial}_D^+$ associée à D , un relevé Φ_D de φ' associé à D et une structure $J \in \mathbb{R}J(\Sigma_g)$ tels que $\det(\Phi_D)^* \bar{\partial}_{D,J}^+ = \bar{\partial}_{D,(\varphi')^*J}^+$.

Vérifions que l'automorphisme Φ_D préserve la structure *Spin* réelle de première classe de Stiefel-Whitney w donnée par $\mathcal{O}_{\Sigma_g, J}(\frac{D}{2})$ que nous noterons ξ' . Remarquons tout d'abord qu'une section méromorphe s associée à $\bar{\partial}_{D,J'}$ induit une structure *Spin* sur N : au-dessus d'un lacet sur Σ_g qui ne passe pas par un des points x_i , z ou \bar{z} , s donne une trivialisation de $\det(N)$ qui, par définition se relève dans la structure *Spin* induite. Si on homotope un lacet γ sur Σ_g pour le faire traverser un des points z ou \bar{z} et obtenir un lacet γ' , alors on a

$$[s \circ \gamma] = [s \circ \gamma'] + 2 \frac{\deg(N) - 2l}{4} f = [s \circ \gamma'] \in H_1(R_{\det(N)}^+, \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}),$$

où f est la classe de la fibre. Si on homotope un lacet γ sur Σ_g pour le faire traverser un des points x_i et obtenir un lacet γ' , alors on a

$$[s \circ \gamma] = [s \circ \gamma'] + 2f = [s \circ \gamma'] \in H_1(R_{\det(N)}^+, \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}).$$

De plus, la structure *Spin* réelle donnée par $\mathcal{O}_{\Sigma_g, J'}(\frac{D}{2})$ est la même que celle induite par une section méromorphe associée à $\bar{\partial}_{D,J'}$. Ainsi, les structures *Spin* réelles données par les $\mathcal{O}_{\Sigma_g, J'}(\frac{D}{2})$ sont toutes les mêmes, et comme $\det(\Phi_D)$ envoie une section méromorphe associée à $\bar{\partial}_{D,J}$ sur une section méromorphe associée à $\bar{\partial}_{D,(\varphi')^*J}$, Φ_D préserve bien une structure *Spin* réelle. Notons de plus que comme Φ_D préserve une polarisation, on a $\varepsilon((\Phi_D)_{o, \xi'}) = 1$. Le résultat est donc vrai pour Φ_D d'après le Théorème 4.2.

Prenons maintenant un Φ comme donné dans l'énoncé. Puisque Φ préserve ξ , on a $\varphi^* w = w$. Comme tous les termes considérés dans le signe sont invariant par

homotopie, on peut supposer que $\varphi_*D = D$. En prenant un relevé Φ_D associé à D , on note $\Phi = (\Phi \circ (\Phi_D)^{-1}) \circ \Phi_D$. Choisissons un automorphisme $f \in \mathbb{R}GL(N)$ qui envoie la structure *Spin* réelle ξ sur ξ' (l'existence de f est donnée par la Proposition 3.1). Le signe de l'action de $\Phi \circ (\Phi_D)^{-1}$ est le même que celui de $f \circ \Phi \circ f^{-1} \circ (\Phi_D)^{-1}$. Or, ce dernier automorphisme préserve une structure *Spin* réelle sur N , donc on a $\text{ind}_2(f \circ \Phi \circ f^{-1} \circ (\Phi_D)^{-1}) = 0$ (voir §3.1.3). Donc $f \circ \Phi \circ f^{-1} \circ (\Phi_D)^{-1}$ préserve une structure *Spin* réelle de Σ_g et d'après le Corollaire 3.1, le signe de l'action de $f \circ \Phi \circ f^{-1} \circ (\Phi_D)^{-1}$ est donné par

$$\varepsilon((f \circ \Phi \circ f^{-1} \circ (\Phi_D)^{-1})_{o,\xi'})^{\deg(N)+1-g} = \varepsilon(\Phi_{o,\xi})^{1-g}.$$

En multipliant avec la signe obtenu au début pour Φ_D on obtient le résultat attendu. \square

CHAPITRE 5

ORIENTABILITÉ DES ESPACES DE MODULES DE COURBES RÉELLES

Soit (X, ω, c_X) une variété symplectique réelle de dimension $2n$ au moins 6. Nous nous intéressons à l'orientabilité des espaces de modules de courbes réelles dans X . Nous rappelons tout d'abord succinctement la construction de ces espaces (en suivant principalement [26] et [30]) ainsi que le rapport avec le fibré déterminant. Nous énonçons ensuite des résultats concernant leur orientabilité.

5.1. Espaces de modules et fibré déterminant

Soit Σ_g une surface réelle compacte orientée de genre g , et l un entier assez grand. Nous notons comme précédemment $J(\Sigma_g)$ (resp. $J_\omega(X)$) l'espace des structures complexes de classe C^l sur Σ_g compatibles avec l'orientation fixée sur la surface (resp. sur X et compatibles avec ω). Le sous-ensemble $\mathbb{R}J_\omega(X)$ de $J_\omega(X)$ est formé des structures presque complexe J telles que c_X est J -antiholomorphe.

Définition 5.1. — Une courbe pseudo-holomorphe paramétrée de genre g dans X est un triplet $(u, J_\Sigma, J) \in L^{k,p}(\Sigma_g, X) \times J(\Sigma_g) \times J_\omega(X)$, où $1 \ll k \ll l$ et $2 < p$, vérifiant

$$du + J \circ du \circ J_\Sigma = 0.$$

On dit qu'une courbe pseudo-holomorphe (u, J_Σ, J) réalise la classe $d \in H_2(X, \mathbb{Z})$ si $u_*([\Sigma_g]) = d$. Enfin, une courbe (u, J_Σ, J) est dite injective quelque part s'il existe un ouvert non vide $U \subset \Sigma_g$ tel que u est une immersion sur U et

$$\forall x \in U, \quad u^{-1}\{u(x)\} = \{x\}.$$

Définition 5.2. — Pour $d \in H_2(X, \mathbb{Z})$, et $m \in \mathbb{N}$, on note $\mathcal{P}_{g,m}^d(X)$ l'espace de modules des courbes pseudo-holomorphes paramétrées de genre g dans X , injectives quelque part, réalisant la classe d , avec m points marqués, c'est-à-dire,

$$\begin{aligned} \mathcal{P}_{g,m}^d(X) = \Big\{ (u, J_\Sigma, J, \underline{z}) \in L^{k,p}(\Sigma_g, X) \times J(\Sigma_g) \times J_\omega(X) \times \Sigma_g^m \mid & du + J \circ du \circ J_\Sigma = 0 \\ & u_*([\Sigma_g]) = d \\ & u \text{ est injective quelque part} \\ & \forall 1 \leq i \neq j \leq m, \quad z_i \neq z_j \Big\}. \end{aligned}$$

Fixons une permutation τ de $\{1, \dots, m\}$ d'ordre 2 admettant au moins un point fixe. Comme expliqué dans [30], le groupe $Diff(\Sigma_g)$ des difféomorphismes de classe C^{l+1} de Σ_g agit sur $\mathcal{P}_{g,m}^d(X)$ par reparamétrage :

$$\begin{aligned} (\phi, (u, J_\Sigma, J, \underline{z})) &\in Diff(\Sigma_g) \times \mathcal{P}_{g,m}^d(X) \\ \mapsto \begin{cases} (u \circ \phi^{-1}, (\phi^{-1})^* J_\Sigma, J, \phi(\underline{z})) & \text{si } \phi \in Diff^+(\Sigma_g) \\ (u \circ \phi^{-1}, -(\phi^{-1})^* J_\Sigma, J, (\phi(z_{\tau(1)}), \dots, \phi(z_{\tau(m)}))) & \text{sinon.} \end{cases} \end{aligned}$$

Une courbe pseudo-holomorphe est dite réelle si elle est fixée par l'action d'un élément non trivial c_Σ de $Diff(\Sigma_g)$ qui est alors unique (autrement dit, une courbe n'est fixée que par un seul difféomorphisme). De plus, le difféomorphisme c_Σ est une involution qui renverse l'orientation fixée sur Σ_g , c'est-à-dire une structure réelle. À chaque structure réelle c_Σ est alors associé $\mathbb{R}_{c_\Sigma} \mathcal{P}_{g,m}^d(X)$, l'ensemble de ses points fixes dans $\mathcal{P}_{g,m}^d(X)$. Notons $\mathbb{R}_\tau \mathcal{P}_{g,m}^d(X)$ la réunion de tous ces ensembles.

Remarquons qu'une structure réelle c_Σ agit sur Σ_g^m par

$$(z_1, \dots, z_m) \rightarrow (c_\Sigma(z_{\tau(1)}), \dots, c_\Sigma(z_{\tau(m)})).$$

Sur une courbe réelle marquée, la configuration de points \underline{z} est un élément de $\mathbb{R}_{c_\Sigma}(\Sigma_g^m)$, le lieu des points fixes de l'action de c_Σ sur Σ_g^m .

Étant donnée une courbe $(u, J_\Sigma, J, \underline{z}) \in \mathbb{R}_\tau \mathcal{P}_{g,m}^d(X)$, le fibré $E_u = u^*TX$ est muni d'un opérateur de Cauchy Riemann réel généralisé noté D , dont la partie J -linéaire induit une structure holomorphe sur E_u (voir [15]). L'application $du : T\Sigma_g \rightarrow E_u$ devient un morphisme analytique de faisceaux holomorphes. Le faisceau quotient \mathcal{N}_u défini par

$$0 \rightarrow T\Sigma_g \xrightarrow{du} E_u \rightarrow \mathcal{N}_u \rightarrow 0$$

se scinde en $\mathcal{O}(N_u) \oplus \mathcal{N}_u^{sing}$ où N_u est un fibré holomorphe et \mathcal{N}_u^{sing} est un faisceau gratte-ciel supporté aux points critiques de u . En particulier, lorsque u est une immersion, le faisceau \mathcal{N}_u est en fait le faisceau des sections d'un fibré vectoriel holomorphe N_u . Tous ces objets sont munis de structures réelles provenant de celles de Σ_g et de X . De plus, l'opérateur D passe au quotient en un opérateur de Cauchy Riemann réel généralisé \bar{D} sur \mathcal{N}_u .

Nous voulons maintenant considérer des courbes non paramétrées. Pour cela, nous notons $\mathcal{M}_{g,m}^d(X)$ (resp. $\mathbb{R}_\tau \mathcal{M}_{g,m}^d(X)$) le quotient de $\mathcal{P}_{g,m}^d(X)$ (resp. $\mathbb{R}_\tau \mathcal{P}_{g,m}^d(X)$) par l'action (libre) de $Diff^+(\Sigma_g)$. Rappelons le résultat suivant (voir [30] et [15]).

Proposition 5.1. — *La projection naturelle $\pi : \mathbb{R}_\tau \mathcal{M}_{g,m}^d(X) \rightarrow \mathbb{R}J_\omega(X)$ est une application Fredholm entre variétés de Banach, d'indice $\text{ind}_{\mathbb{R}}(\pi) = c_1(X)d + (n - 3)(1 - g) + m$. En un point $[u, J_\Sigma, J, \underline{z}] \in \mathbb{R}_\tau \mathcal{M}_{g,m}^d(X)$ associé à la structure réelle c_Σ , le conoyau de $d_{[u, J_\Sigma, J, \underline{z}]} \pi$ est isomorphe à $H_D^1(\Sigma_g, N_u)_{+1}$ et son noyau entre dans la suite exacte*

$$0 \rightarrow \mathbb{R}_{c_\Sigma} (T_\Sigma \Sigma_g^m) \rightarrow \ker(d_{[u, J_\Sigma, J, \underline{z}]} \pi) \xrightarrow{d\Pi} H_D^0(\Sigma_g, \mathcal{N}_u)_{+1} \rightarrow 0.$$

où $\Pi : \mathbb{R}_\tau \mathcal{M}_{g,m}^d(X) \rightarrow \mathbb{R}J_\omega(X)$ est le morphisme d'oubli des points marqués. En particulier, pour une structure presque complexe $J \in \mathbb{R}J_\omega(X)$ générique,

$\mathbb{R}_\tau \mathcal{M}_{g,m}^d(X, J) = \pi^{-1}\{J\}$ est une variété lisse de dimension $c_1(X)d + (n-3)(1-g) + m$.

Nous noterons $\mathbb{R}J_\omega^{reg}(X)$ le sous-ensemble de $\mathbb{R}J_\omega(X)$ formé des valeurs régulières de π .

Nous voulons étudier l'orientabilité de $\mathbb{R}_\tau \mathcal{M}_{g,m}^d(X, J)$ pour $J \in \mathbb{R}J_\omega^{reg}(X)$. Ceci revient à étudier l'orientabilité du fibré déterminant $\det(T\mathbb{R}_\tau \mathcal{M}_{g,m}^d(X, J))$. Considérons pour cela le fibré en droites réelles Det sur $\mathbb{R}_\tau \mathcal{P}_{g,m}^d(X)$ de fibre $\Lambda^{\max} H_D^0(\Sigma_g, \mathcal{N}_u)_{+1} \otimes \left(\Lambda^{\max} H_D^1(\Sigma_g, \mathcal{N}_u)_{+1} \right)^*$ au-dessus de $(u, J_\Sigma, J, \underline{z})$. Le groupe $\text{Diff}^+(\Sigma_g)$ agit naturellement sur Det , et en passant au quotient, on obtient un fibré noté $\overline{\text{Det}}$ sur $\mathbb{R}_\tau \mathcal{M}_{g,m}^d(X)$. Nous notons $\overline{\text{Det}}_J$ sa restriction à $\mathbb{R}_\tau \mathcal{M}_{g,m}^d(X, J)$. D'après la Proposition 5.1, nous avons alors $\det(T\mathbb{R}_\tau \mathcal{M}_{g,m}^d(X, J)) = \det(\mathbb{R}_{c_\Sigma}(T_{\underline{z}}\Sigma_g^m)) \otimes \Lambda^{\max} H_D^0(\Sigma_g, \mathcal{N}_u)_{+1} = \det(\mathbb{R}_{c_\Sigma}(T_{\underline{z}}\Sigma_g^m)) \otimes \overline{\text{Det}}_J$.

Une partie importante de l'orientabilité de $\mathbb{R}_\tau \mathcal{M}_{g,m}^d(X, J)$ est donc contenue dans l'étude de l'orientabilité du fibré Det et de l'action du groupe $\text{Diff}^+(\Sigma_g)$ dessus. C'est ce que nous avons commencé dans les parties 2, 3 et 4, ce que nous poursuivons dans les paragraphes suivants.

5.2. Orientabilité du fibré déterminant

Commençons par quelques remarques. Pour étudier l'orientabilité du fibré $\overline{\text{Det}}$, nous pouvons tout d'abord nous intéresser au fibré Det sur $\mathbb{R}_\tau \mathcal{P}_{g,m}^d(X)$. Pour décrire la première classe de Stiefel-Whitney de Det , on procède de la façon suivante. On choisit une courbe dans $\mathbb{R}_\tau \mathcal{P}_{g,m}^d(X)$ et un lacet γ paramétré par $[0, 1]$ passant par cette courbe en 0 et en 1 puis on trivialise la famille de fibrés $(N_{\gamma(t)})_{t \in [0, 1]}$. On obtient alors un automorphisme f de $N_{\gamma(0)}$ au-dessus de l'identité et le fibré Det n'est orientable au-dessus de γ que si l'action de f sur $\text{Det}(N_{\gamma(0)})$ préserve les orientations.

Nous avons décrit l'action de f au §3 en utilisant son action sur les classes de bordisme de structures *Spin* réelles sur la surface. Cette description n'est toutefois pas satisfaisante dans le cas présent. En effet, nous voudrions pouvoir exprimer la première classe de Stiefel-Whitney de Det en fonction de la première classe de Stiefel-Whitney d'un fibré décrit en termes purement topologiques. Or, si l'on considère sur $\mathbb{R}_\tau \mathcal{P}_{g,m}^d(X)$ le fibré dont la fibre au-dessus d'une courbe est formée des structures *Spin* sur Σ_g , celui-ci est trivial et n'a donc aucun rapport avec Det . Ceci est à rapprocher des remarques que nous avons faites au début du §4 : nous n'avons aucun moyen de définir en général l'action d'un isomorphisme $g : (N, c_N) \rightarrow (M, c_M)$ sur les structures *Spin* réelles sur la surface. L'action que nous avons définie au §3 n'est en ce sens pas naturelle.

Nous pouvons toutefois donner des résultats sur l'orientabilité de $\overline{\text{Det}}$ dans deux cas particuliers.

5.2.1. Le cas séparant. — Nous pouvons partitionner $\mathbb{R}_\tau \mathcal{M}_{g,m}^d(X)$ (resp. $\mathbb{R}_\tau \mathcal{P}_{g,m}^d(X)$) en sous-ensembles $\mathbb{R}_\tau^{sep} \mathcal{M}_{g,m}^d(X)$ (resp. $\mathbb{R}_\tau^{sep} \mathcal{P}_{g,m}^d(X)$) qui contient

les courbes réelles séparantes et $\mathbb{R}_\tau^{nsep} \mathcal{M}_{g,m}^d(X)$ (resp. $\mathbb{R}_\tau^{nsep} \mathcal{P}_{g,m}^d(X)$) qui contient les courbes réelles non séparantes.

Remarquons que sur $\mathbb{R}_\tau \mathcal{M}_{g,m}^d(X)$, nous avons une fonction localement constante k_- à valeurs dans $\{0, \dots, g+1\}$ qui associe à la courbe $[u, J_\Sigma, J, \bar{z}]$ le nombre de composantes de $\mathbb{R}_{c_\Sigma} \Sigma_g$ sur lesquelles $\mathbb{R}E_u$ n'est pas orientable.

Considérons sur $\mathbb{R}_\tau \mathcal{P}_{g,m}^d(X)$ les fibrés en droites réelles \mathfrak{P}^\pm , O_X associés aux $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ -fibrés principaux de fibres respectives $\bigotimes_{i=1}^k Pin^\pm((\mathbb{R}E_u)_i)$ et

$$\bigotimes_{i=1}^k o((\mathbb{R}E_u)_i) \quad (\text{où } o((\mathbb{R}E_u)_i) \text{ est l'ensemble des orientations de } (\mathbb{R}E_u)_i)$$

au-dessus de $[u, J_\Sigma, J, \bar{z}]$. Notons $\det(H^1(\Sigma_g, \mathbb{R})_{-1})$ et \mathbb{R}_w les fibrés en droites réelles sur $\mathbb{R}_\tau \mathcal{P}_{g,m}^d(X)$ de fibres respectives $\det(H^1(\Sigma_g, \mathbb{R})_{-1})$ et $\mathbb{R}_{w_1(\mathbb{R}E_u)} = \det(\bigoplus_{w_1(\mathbb{R}E_u)([\mathbb{R}\Sigma_g]_i)=1} Vect_{\mathbb{R}}((\mathbb{R}\Sigma_g)_i))$ (où $Vect_{\mathbb{R}}(e)$ est l'espace vectoriel de dimension 1 sur \mathbb{R} engendré par e) au-dessus de $[u, J_\Sigma, J, \bar{z}]$.

Enfin, lorsque la courbe (Σ_g, c_Σ) est séparante notons H_{c_Σ} l'ensemble constitué des deux orientations de $\mathbb{R}_{c_\Sigma} \Sigma_g$ provenant de l'orientation fixée sur Σ_g . Posons H le fibré en droites réelles sur $\mathbb{R}_\tau^{sep} \mathcal{P}_{g,m}^d(X)$ associé au $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ -fibré principal de fibre H_{c_Σ} au-dessus de $[u, J_\Sigma, J, \bar{z}]$.

Tous ces fibrés en droites sur $\mathbb{R}_\tau^{sep} \mathcal{P}_{g,m}^d(X)$ induisent des fibrés sur $\mathbb{R}_\tau^{sep} \mathcal{M}_{g,m}^d(X)$ que nous noterons de la même façon.

Théorème 5.1. — *Le fibré $\overline{\text{Det}}$ sur $\mathbb{R}_\tau^{sep} \mathcal{M}_{g,m}^d(X)$ est canoniquement isomorphe aux fibrés en droites*

$$\det(H^1(\Sigma_g, \mathbb{R})_{-1})^{n-1} \otimes H^{\frac{c_1(X)d-k_-}{2}} \otimes \mathbb{R}_w \otimes \mathfrak{P}^- \otimes O_X$$

et

$$\det(H^1(\Sigma_g, \mathbb{R})_{-1})^{n-1} \otimes H^{\frac{c_1(X)d+k_-}{2}} \otimes \mathbb{R}_w \otimes \mathfrak{P}^+ \otimes O_X.$$

La différence entre le cas Pin^+ et Pin^- vient ici principalement de la remarque suivante (voir [17]). Si F est un fibré vectoriel réel orientable sur le cercle, alors il existe une correspondance canonique entre $Pin^+(F)$ et $Pin^-(F)$ qui consiste à associer à une structure Pin^\pm sur F les deux structures $Spin$ sur F opposées l'une de l'autre obtenues en fixant une orientation sur F . Si F n'est pas orientable, cette correspondance n'existe plus.

La démonstration du Théorème 5.1 occupe les §5.3.1 et 5.4.

5.2.2. Le cas $Spin$. — Pour $d \in H_2(X, \mathbb{Z})$ tel que $c_1(X)d$ est pair, notons $\mathbb{R}_\tau \mathcal{M}_{g,m}^{d,0}(X)$ (resp. $\mathbb{R}_\tau \mathcal{P}_{g,m}^{d,0}(X)$) l'union des composantes de $\mathbb{R}_\tau \mathcal{M}_{g,m}^d(X)$ (resp. $\mathbb{R}_\tau \mathcal{P}_{g,m}^d(X)$) sur lesquelles nous avons $w_1(\mathbb{R}E_u) = 0$. Considérons $\mathbb{R}_\tau \mathcal{M}_{g,m}^{d,Spin}(X)$ (resp. $\mathbb{R}_\tau \mathcal{P}_{g,m}^{d,Spin}(X)$) le revêtement à 2^{g+k-1} feuillets associé au $(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^{g+k-1}$ -fibré principal sur $\mathbb{R}_\tau \mathcal{M}_{g,m}^{d,0}(X)$ (resp. $\mathbb{R}_\tau \mathcal{P}_{g,m}^{d,0}(X)$) dont la fibre en $[u, J_\Sigma, J, \bar{z}]$ est formée des structures $Spin$ réelle sur E_u . Nous disposons sur $\mathbb{R}_\tau \mathcal{M}_{g,m}^{d,Spin}(X)$

du fibré en droites réelles O_X^{Spin} associé au $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ -fibré principal dont la fibre au-dessus de $([u, J_\Sigma, J, \underline{z}], \xi)$ est composée des deux semi-orientations de $\mathbb{R}E$ associées à ξ . D'autre part, sur chaque composante connexe de $\mathbb{R}_\tau \mathcal{P}_{g,m}^{d,Spin}(X)$, toutes les structures $Spin$ réelles ont même première classe de Stiefel-Whitney. On définit donc le fibré $H_w^1(\mathbb{R}\Sigma_g, \mathbb{R})$ sur $\mathbb{R}_\tau \mathcal{P}_{g,m}^{d,Spin}(X)$ de fibre $\bigotimes_{w([\mathbb{R}\Sigma_g]_i)=1} H^1((\mathbb{R}\Sigma_g)_i, \mathbb{R})$ au-dessus $(u, J_\Sigma, J, \underline{z}, \xi)$, où ξ est de première classe de Stiefel-Whitney w . On note encore $H_w^1(\mathbb{R}\Sigma_g, \mathbb{R})$ le fibré induit sur $\mathbb{R}_\tau \mathcal{M}_{g,m}^{d,Spin}(X)$.

Théorème 5.2. — *Soit $d \in H_2(X, \mathbb{Z})$ tel que $c_1(X)d$ est pair. Le fibré $\overline{\text{Det}}$ sur $\mathbb{R}_\tau \mathcal{M}_{g,m}^{d,Spin}(X)$ est canoniquement isomorphe au fibré*

$$\det(H^1(\Sigma_g, \mathbb{R})_{-1})^{n-1} \otimes H_w^1(\mathbb{R}\Sigma_g, \mathbb{R}) \otimes (O_X^{Spin})^{1-g} \otimes \mathfrak{P}^\pm.$$

La démonstration du Théorème 5.2 occupe les paragraphes 5.3.2 et 5.4.

5.2.3. Exemples. — Avant de passer aux démonstrations, nous donnons quelques applications des Théorèmes 5.1 et 5.2.

Considérons tout d'abord le cas des courbes séparantes. Il a déjà été traité par plusieurs auteurs. Welschinger dans [31] a calculé la première classe de Stiefel-Whitney du compactifié de l'espace $\mathbb{R}_\tau \mathcal{M}_{0, \frac{c_1(X)d}{2}}^d(X)$ lorsque (X, ω, c_X) est une variété symplectique réelle fortement semi-positive dont la partie réelle est Pin^\pm . Le Théorème 5.1 et le Lemme 5.1 nous permettent de retrouver une partie de ce résultat (voir Corollaire 5.1).

- Lemme 5.1.** — 1. *Si τ n'est pas l'identité, alors le fibré $\mathbb{R}(T_{\underline{z}}\Sigma_g^m)$ sur $\mathbb{R}_\tau^{sep} \mathcal{M}_{g,m}^d(X)$ est orientable.*
2. *Le fibré $\mathbb{R}(T_{\underline{z}}\Sigma_g^m)$ est orientable sur les composantes connexes de $\mathbb{R}_{id}^{sep} \mathcal{M}_{g,m}^d(X)$ qui regroupent les courbes dont au moins une composante de la partie réelle contient trois points marqués.*
3. *Le fibré $\mathbb{R}(T_{\underline{z}}\Sigma_g^m)$ est orientable sur les composantes connexes de $\mathbb{R}_\tau \mathcal{M}_{g,m}^{d,Spin}(X)$ qui regroupent les courbes dont toutes les composantes de la partie réelle contiennent trois points marqués.*

Démonstration. — Prenons $[u_0, (J_\Sigma)_0, J_0, \underline{z}_0] \in \mathbb{R}_\tau \mathcal{M}_{g,m}^d(X)$ et choisissons un lacet $\gamma : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}_\tau \mathcal{M}_{g,m}^d(X)$ tel que $\gamma(0) = \gamma(1) = [u_0, (J_\Sigma)_0, J_0, \underline{z}_0]$. Ce lacet se relève en un chemin $(u_t, (J_\Sigma)_t, J_t, \underline{z}_t)_{t \in [0,1]}$ dans $\mathbb{R}_\tau \mathcal{P}_{g,m}^d(X)$ joignant $(u_0, (J_\Sigma)_0, J_0, \underline{z}_0)$ à $(u_1, (J_\Sigma)_1, J_1, \underline{z}_1) = \varphi.(u_0, (J_\Sigma)_0, J_0, \underline{z}_0)$, où $\varphi \in \mathbb{R}Diff^+(\Sigma_g)$. On obtient alors une trivialisation de $\mathbb{R}(T_{\underline{z}_t}\Sigma_g^m)$ au-dessus de $[0, 1]$ en choisissant une famille continue $\phi_t \in \mathbb{R}Diff^+(\Sigma_g)$, $t \in [0, 1]$, telle que pour tout $t \in [0, 1]$, $\phi_t^{-1}(\underline{z}_t) = \underline{z}_0$. La valeur de la première classe de Stiefel-Whitney du fibré $\mathbb{R}(T_{\underline{z}}\Sigma_g^m)$ appliquée à γ est alors donnée par le signe de l'action de $d\phi_1^{-1} \circ d\varphi$ sur les orientations de $\mathbb{R}(T_{\underline{z}_0}\Sigma_g^m)$.

Dans le premier cas, \underline{z}_0 contient au moins une paire de points complexes conjugués. En particulier, $\phi_1^{-1} \circ \varphi$ fixe ces deux points. Comme les courbes considérées sont séparantes, cela implique que $\phi_1^{-1} \circ \varphi$ préserve les deux orientations de $\mathbb{R}\Sigma_g$

provenant de l'orientation fixée sur Σ_g . Ainsi, $\phi_1^{-1} \circ \varphi$ préserve les orientations de $\mathbb{R}(T_{z_0}\Sigma_g^m)$.

Dans le second cas, $\phi_1^{-1} \circ \varphi$ fixe trois points sur une des composantes de $\mathbb{R}\Sigma_g$. En particulier $\phi_1^{-1} \circ \varphi$ préserve les orientations de cette composante. À nouveau, $\phi_1^{-1} \circ \varphi$ préserve les orientations de $\mathbb{R}(T_{z_0}\Sigma_g^m)$.

On traite le point 3 comme les deux précédents, en notant cette fois que comme la courbe n'est plus forcément séparante, les actions de $\phi_1^{-1} \circ \varphi$ sur les orientations des composantes de $\mathbb{R}\Sigma_g$ sont a priori indépendantes les unes des autres. \square

Corollaire 5.1. — *Soit (X, ω, c_X) une variété symplectique réelle de dimension au moins 6. Supposons que la partie réelle de X admet une structure $Spin$. Alors pour tout $d \in H_2(X, \mathbb{Z})$ tel que $c_1(X)d \geq 0$, $m \geq 3$, et $J \in \mathbb{R}J_\omega(X)$ générique, la variété $\mathbb{R}_\tau \mathcal{M}_{0,m}^d(X, J)$ est orientable.* \square

D'autre part, en s'appuyant sur des travaux de Fukaya-Oh-Ohta-Ono [11], Solomon dans [27] a étudié l'orientabilité des espaces de modules de courbes à valeurs dans (X, ω, c_X) de partie réelle relativement Pin^\pm , et dont la source est une surface de Riemann à bord de genre quelconque et munie d'une structure conforme fixée.

Pour ce qui est du cas $Spin$, on note que nous n'obtenons dans le Théorème 5.2 qu'un résultat concernant un revêtement de l'espace de modules qui nous intéresse. Il existe toutefois une famille de variétés donnée dans le Lemme 5.2 pour laquelle on peut obtenir un résultat plus précis (voir Corollaire 5.2).

Lemme 5.2. — *Soit $X_\delta \subset \mathbb{C}P^N$ une hypersurface complexe lisse de degré δ . Supposons que N est supérieur ou égal à quatre et vérifie $N \equiv 0$ ou $3 \pmod{4}$, que $\delta \equiv N + 1 \pmod{2}$ et que X_δ est de partie réelle non vide. Alors X_δ admet une unique structure $Spin$ réelle ξ_0 , et sa partie réelle est $Spin$. De plus, si $\delta \equiv N + 1 \pmod{4}$, alors la première classe de Stiefel-Whitney de ξ_0 est nulle.*

Démonstration. — Notons i l'inclusion de X_δ dans $\mathbb{C}P^N$. D'après la formule d'adjonction, nous avons $c_1(X_\delta) + \delta i^*h = (N + 1)i^*h$, où h est le générateur de $H^2(\mathbb{C}P^N, \mathbb{Z})$. Comme $\delta \equiv N + 1 \pmod{2}$, $c_1(X_\delta)$ est divisible par deux dans $H^2(X_\delta, \mathbb{Z})$. En particulier X_δ admet une structure $Spin$. D'autre part, d'après le Théorème de l'hyperplan de Lefschetz, on a $H^1(X_\delta, \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}) \cong H^1(\mathbb{C}P^N, \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}) = \{0\}$. Ainsi X_δ admet une unique structure $Spin$, qui est donc réelle, et que l'on note ξ_0 .

L'existence de ξ_0 implique que $\mathbb{R}X_\delta$ est orientable. De nouveau grâce à la formule d'adjonction on a $w_2(\mathbb{R}X_\delta) = \frac{N(N+1)}{2}t^2$, où t est le générateur de $H^1(\mathbb{R}P^N, \mathbb{Z}/2\mathbb{Z})$. Ainsi, sous les hypothèses faites sur N , $w_2(\mathbb{R}X_\delta) = 0$ et $\mathbb{R}X_\delta$ est $Spin$. \square

Notons que $\mathbb{C}P^{N-1}$ vérifie les hypothèses du Lemme 5.2 lorsque N est pair. En appliquant le Théorème 5.2 et la Proposition 5.1 aux cas mis en avant dans le Lemme 5.2, on obtient le Corollaire 5.2 suivant.

Corollaire 5.2. — Soit X_δ une hypersurface lisse de degré δ de $\mathbb{C}P^N$, $N \geq 4$, $N = 0$ ou $3 \pmod 4$, de partie réelle non vide et vérifiant $\delta = N + 1 \pmod 4$ et $\delta \leq N + 1$. Soit $d \in H_2(X_\delta, \mathbb{Z})$, $m \geq 1$ et τ une permutation de $\{1, \dots, m\}$ d'ordre 2 et ayant au moins un point fixe. Pour $J \in \mathbb{R}J_{\omega_{Fub}}^{reg}(X_\delta)$ on a

$$w_1(\mathbb{R}_\tau \mathcal{M}_{g,m}^d(X_\delta, J)) = w_1(\mathbb{R}(T_{\mathbb{Z}} \Sigma_g^m)) + (\delta - 1)w_1(\det(H^1(\Sigma_g, \mathbb{R})_{-1})).$$

Démonstration. — D'après le Lemme 5.2, la partie réelle de X_δ est *Spin*, donc la première classe de Stiefel-Whitney de $(O_X^{Spin})^{1-g} \otimes \mathfrak{P}^\pm$ est nulle. D'après ce même Lemme, X_δ admet une unique structure *Spin* réelle qui est de plus de première classe de Stiefel-Whitney nulle. Cette structure fournit une section du revêtement $\mathbb{R}_\tau \mathcal{M}_{g,m}^{d, Spin}(X_\delta) \rightarrow \mathcal{M}_{g,m}^d(X_\delta)$. On conclut alors grâce au Théorème 5.2 et à la Proposition 5.1. \square

5.3. Suites exactes courtes de fibrés vectoriels complexes

Nous commençons par nous intéresser au problème « linéaire » suivant. Soit (Σ_g, s_Σ) une courbe réelle de partie réelle non vide et $J \in \mathbb{R}J(\Sigma_g)$. Considérons une suite exacte

$$\mathcal{S} : 0 \rightarrow (T\Sigma_g, dc_\Sigma) \rightarrow (E, c_E) \rightarrow (N, c_N) \rightarrow 0$$

de fibrés vectoriels complexes, où $T\Sigma_g$ est muni de la structure complexe J . Existe-t-il un isomorphisme $\phi_{\mathcal{S}}$ défini canoniquement entre le fibré $\text{Det}(N)$ et un fibré en droites réelles $\mathcal{T}_{\mathcal{S}}$ donné en termes topologiques à déterminer ?

Précisons tout de suite ce que nous entendons ici par canoniquement. Si

$$\mathcal{S}' : 0 \rightarrow (T\Sigma_g, dc_\Sigma) \rightarrow (E', c_{E'}) \rightarrow (N', c_{N'}) \rightarrow 0$$

est une autre suite exacte de fibrés vectoriels complexes avec N' de même rang que N , nous dirons qu'un couple (F, f) formé de deux isomorphismes $F : (E, c_E) \rightarrow (E', c_{E'})$ et $f : (N, c_N) \rightarrow (N', c_{N'})$ et un isomorphisme entre \mathcal{S} et \mathcal{S}' si le diagramme

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & \longrightarrow & (T\Sigma_g, dc_\Sigma) & \longrightarrow & (E, c_E) & \longrightarrow & (N, c_N) \longrightarrow 0 \\ & & \downarrow \text{id} & & \downarrow F & & \downarrow f \\ 0 & \longrightarrow & (T\Sigma_g, dc_\Sigma) & \longrightarrow & (E, c_E) & \longrightarrow & (N, c_N) \longrightarrow 0 \end{array}$$

commute. Nous voyons alors \mathcal{T} comme un foncteur de la catégorie \mathfrak{S} des suites exactes du même type que \mathcal{S} dont les morphismes sont décrits plus haut dans \mathfrak{D} qui est celle des fibrés en droites réelles. Nous avons un autre foncteur $\mathcal{D}et : \mathfrak{S} \rightarrow \mathfrak{D}$ qui à \mathcal{S} associe $\text{Det}(N)$. Les isomorphismes ϕ doivent alors vérifier

$$\mathcal{T}(F, f) \circ \phi_{\mathcal{S}} = \phi_{\mathcal{S}'} \circ \mathcal{D}et(F, f).$$

Nous considérons dans la suite les deux hypothèses suivantes :

- la courbe (Σ_g, c_Σ) est séparante.
- la partie réelle du fibré (E, c_E) est orientable. En particulier E admet une structure *Spin* réelle, et on suppose une telle structure ξ fixée.

Nous répondons à la question posée plus haut sous ces deux hypothèses dans les Propositions 5.2 et 5.3.

5.3.1. Le cas séparant. —

Proposition 5.2. — *Soit $J_\Sigma \in \mathbb{R}J(\Sigma_g)$ et*

$$\mathcal{S} : 0 \rightarrow (T\Sigma_g, dc_\Sigma) \rightarrow (E, c_E) \rightarrow (N, c_N) \rightarrow 0$$

une suite exacte de fibrés vectoriels complexes. Supposons que (Σ_g, c_Σ) est séparante. Si N est de rang un, il existe un isomorphisme canonique

$$\phi_{\mathcal{S}} : \text{Det}(N) \rightarrow \det(H^1(\Sigma_g, \mathbb{R})_{-1}) \otimes (H_{c_\Sigma})^{\frac{\deg(E) - k_-}{2}} \otimes \mathbb{R}_{w_1(\mathbb{R}E)} \otimes \bigotimes_{w_1(\mathbb{R}E)([\mathbb{R}\Sigma_g]_i)=0} o((\mathbb{R}E)_i).$$

Si N est de rang au moins deux, alors il existe deux isomorphismes canoniques

$$\begin{aligned} \phi_{\mathcal{S}}^+ : \text{Det}(N) &\rightarrow \det(H^1(\Sigma_g, \mathbb{R})_{-1})^{\text{rg}(N)} \otimes (H_{c_\Sigma})^{\frac{\deg(E) + k_-}{2}} \\ &\otimes \mathbb{R}_{w_1(\mathbb{R}E)} \otimes \bigotimes_{i=1}^k \text{Pin}^+((\mathbb{R}E)_i) \otimes \bigotimes_{w_1(\mathbb{R}E)([\mathbb{R}\Sigma_g]_i)=0} o((\mathbb{R}E)_i), \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} \phi_{\mathcal{S}}^- : \text{Det}(N) &\rightarrow \det(H^1(\Sigma_g, \mathbb{R})_{-1})^{\text{rg}(N)} \otimes (H_{c_\Sigma})^{\frac{\deg(E) - k_-}{2}} \\ &\otimes \mathbb{R}_{w_1(\mathbb{R}E)} \otimes \bigotimes_{i=1}^k \text{Pin}^-((\mathbb{R}E)_i) \otimes \bigotimes_{w_1(\mathbb{R}E)([\mathbb{R}\Sigma_g]_i)=0} o((\mathbb{R}E)_i). \end{aligned}$$

De plus, tous ces isomorphismes sont équivariant pour l'action de $\mathbb{R}\text{Diff}^+(\Sigma_g)$.

Précisons la dernière affirmation de la Proposition 5.2. Étant donné un difféomorphisme $\varphi \in \mathbb{R}\text{Diff}^+(\Sigma_g)$, on peut tirer en arrière la suite exacte \mathcal{S} pour en obtenir une nouvelle $\varphi^*\mathcal{S}$. De plus, on a un isomorphisme $\varphi^* : \varphi^*N \rightarrow N$ qui induit un isomorphisme φ^* au niveau des fibrés déterminants. Nous affirmons alors que $\varphi^* \circ \phi_{\varphi^*\mathcal{S}} = \phi_{\mathcal{S}} \circ \varphi^*$.

Notons d'autre part qu'un isomorphisme (F, f) entre deux suites exactes agit naturellement sur les fibrés en droites réelles trouvés dans la Proposition 5.2, et c'est cette action que nous considérons lorsque nous affirmons que les isomorphismes ϕ sont canoniques. Nous décrivons de plus la relation entre les actions de F et de f sur les orientations des différents fibrés déterminants dans le Lemme 5.3. Nous donnons un énoncé plus général que nécessaire pour la démonstration de la Proposition 5.2, mais dont nous aurons besoin plus tard.

Lemme 5.3. — *Soit (E, c_E) et (N, c_N) deux fibrés vectoriels complexes sur (Σ_g, c_Σ) de partie réelle non vide et tels que $\text{rg}(E) = \text{rg}(N) + 1$. Soit $\pi : (E, c_E) \rightarrow (N, c_N)$ un morphisme surjectif de fibrés vectoriels complexes. Soit $J \in \mathbb{R}J(\Sigma_g)$, $\varphi \in \mathbb{R}\text{Diff}^+(\Sigma_g, w_1(\mathbb{R}N))$ et une famille continue $(J_t)_{t \in [0,1]}$ d'éléments de $\mathbb{R}J(\Sigma_g)$ telle que $J_0 = \varphi^*J$ et $J_1 = J$. Soit enfin $i_t : (T\Sigma_g, dc_\Sigma) \rightarrow (E, c_E)$ une famille*

continue de morphismes injectifs de fibrés vectoriels complexes (où $T\Sigma_g$ est muni de la structure complexe J_t) tels que pour chaque $t \in [0, 1]$ la suite

$$0 \rightarrow T\Sigma_g \xrightarrow{i_t} E \xrightarrow{\pi} N \rightarrow 0$$

est exacte. Soit (f, φ) un élément de $\mathbb{R}\text{Aut}(N)$, (F, φ) un élément de $\mathbb{R}\text{Aut}(E)$ tels que le diagramme

$$(*) \quad \begin{array}{ccccccc} 0 & \longrightarrow & T\Sigma_g & \xrightarrow{i_0} & E & \xrightarrow{\pi} & N \longrightarrow 0 \\ & & \downarrow \text{d}\varphi & & \downarrow F & & \downarrow f \\ 0 & \longrightarrow & T\Sigma_g & \xrightarrow{i_1} & E & \xrightarrow{\pi} & N \longrightarrow 0 \end{array}$$

commute. Alors le signe de l'action de f sur les orientations du fibré $\text{Det}(N)$ est le produit du signe de F sur les orientations de $\text{Det}(E)$ par $\det(\varphi^*)$.

Démonstration. — Fixons deux familles continues d'opérateurs de Cauchy-Riemann réels $(\bar{\partial}_{E,t})_{t \in [0,1]}$ sur E et $(\bar{\partial}_{N,t})_{t \in [0,1]}$ sur N telles que pour chaque $t \in [0, 1]$, on a une suite exacte de fibrés holomorphes

$$0 \rightarrow (T\Sigma_g, \bar{\partial}_{T\Sigma_g, J_t}) \xrightarrow{i_t} (E, \bar{\partial}_{E,t}) \xrightarrow{\pi} (N, \bar{\partial}_{N,t}) \rightarrow 0,$$

et vérifiant $\bar{\partial}_{E,0} = F^* \bar{\partial}_{E,1}$ et $\bar{\partial}_{N,0} = f^* \bar{\partial}_{N,1}$. On obtient alors un isomorphisme canonique entre fibrés en droites réelles sur $[0, 1]$

$$\text{Det}(\bar{\partial}_{E,t}) = \text{Det}(\bar{\partial}_{T\Sigma_g, J_t}) \otimes \text{Det}(\bar{\partial}_{N,t})$$

et un diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccc} \text{Det}(\bar{\partial}_{E,0}) & \xlongequal{\quad} & \text{Det}(\bar{\partial}_{T\Sigma_g, J_0}) \otimes \text{Det}(\bar{\partial}_{N,0}) \\ F \downarrow & & \downarrow \text{d}\varphi \otimes f \\ \text{Det}(\bar{\partial}_{E,1}) & \xlongequal{\quad} & \text{Det}(\bar{\partial}_{T\Sigma_g, J_1}) \otimes \text{Det}(\bar{\partial}_{N,1}), \end{array}$$

ce qui donne le résultat voulu en utilisant le Lemme 4.1. □

Nous commençons par considérer le cas où N est de rang un. Introduisons pour cela la définition suivante.

Définition 5.3. — Soit $J_\Sigma \in \mathbb{R}J(\Sigma_g)$ et $0 \rightarrow (T\Sigma_g, \text{dc}_\Sigma, \bar{\partial}_{T\Sigma, J_\Sigma}) \rightarrow (E, c_E, \bar{\partial}_E) \rightarrow (N, c_N, \bar{\partial}_N) \rightarrow 0$ une suite exacte de fibrés vectoriels holomorphes réels, où N est de rang un.

La transformation élémentaire réelle négative en $x \in \mathbb{R}\Sigma_g$ de cette suite exacte est définie par le diagramme commutatif suivant

$$\begin{array}{ccccccc}
 & & 0 & & 0 & & 0 \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\
 0 & \longrightarrow & T\Sigma_g & \longrightarrow & \mathcal{E}_{-x} & \longrightarrow & \mathcal{N}_{-x} \longrightarrow 0 \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\
 0 & \longrightarrow & T\Sigma_g & \longrightarrow & \mathcal{E} & \longrightarrow & \mathcal{N} \longrightarrow 0 \\
 & & \downarrow & & \downarrow \text{ev}_x & & \downarrow \text{ev}_x \\
 0 & \longrightarrow & 0 & \longrightarrow & E_x/T_x\Sigma_g & \longrightarrow & N_x \longrightarrow 0 \\
 & & & & \downarrow & & \downarrow \\
 & & & & 0 & & 0.
 \end{array}$$

La transformation élémentaire réelle négative en une paire de points complexes conjugués $\{z, \bar{z}\}$ de Σ_g de cette même suite exacte est définie par le diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccccccc}
 & & 0 & & 0 & & 0 \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\
 0 & \longrightarrow & T\Sigma_g & \longrightarrow & \mathcal{E}_{-z-\bar{z}} & \longrightarrow & \mathcal{N}_{-z-\bar{z}} \longrightarrow 0 \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\
 0 & \longrightarrow & T\Sigma_g & \longrightarrow & \mathcal{E} & \longrightarrow & \mathcal{N} \longrightarrow 0 \\
 & & \downarrow & & \downarrow \text{ev}_{z,\bar{z}} & & \downarrow \text{ev}_{z,\bar{z}} \\
 0 & \longrightarrow & 0 & \longrightarrow & N_z \oplus N_{\bar{z}} & \longrightarrow & N_z \oplus N_{\bar{z}} \longrightarrow 0 \\
 & & & & \downarrow & & \downarrow \\
 & & & & 0 & & 0.
 \end{array}$$

Remarquons que les faisceaux \mathcal{N}_{-x} et \mathcal{E}_{-x} sont localement libres, de rangs respectivement un et deux, de degrés respectifs $\deg(N) - 1$ et $\deg(E) - 1$, et leurs parties réelles sont de premières classes de Stiefel-Whitney respectives $w_1(\mathbb{R}N) - [\mathbb{R}\Sigma_g]_x^*$ et $w_1(\mathbb{R}E) - [\mathbb{R}\Sigma_g]_x^*$. Quant aux faisceaux $\mathcal{N}_{-z-\bar{z}}$ et $\mathcal{E}_{-z-\bar{z}}$ ils sont aussi localement libres, de rangs respectivement un et deux, de degrés respectifs $\deg(N) - 2$ et $\deg(E) - 2$, et leurs parties réelles sont de premières classes de Stiefel-Whitney respectives $w_1(\mathbb{R}N)$ et $w_1(\mathbb{R}E)$.

De même qu'au §4.4, nous pouvons effectuer une transformation élémentaire négative en un diviseur effectif D d'une suite exacte de fibrés holomorphes réels \mathcal{S} , et retrouver une suite exacte de fibrés holomorphes réels $\mathcal{S}_{-\vec{D}}$ ainsi qu'une application naturelle

$$t_{-\vec{D}} : \mathbb{R}\mathcal{C}_J(N) \rightarrow \mathbb{R}\mathcal{C}_J(N_{-\vec{D}}).$$

Nous notons avec des indices $-\overrightarrow{D}$ les deux nouveaux fibrés vectoriels complexes obtenus.

Lemme 5.4. — Soit $J_\Sigma \in \mathbb{R}J(\Sigma_g)$ et

$$\mathcal{S} : 0 \rightarrow (T\Sigma_g, dc_\Sigma, \bar{\partial}_{T\Sigma, J_\Sigma}) \rightarrow (E, c_E, \bar{\partial}_E) \rightarrow (N, c_N, \bar{\partial}_N) \rightarrow 0$$

une suite exacte de fibrés vectoriels holomorphes réels, où N est de rang un. Fixons $\overrightarrow{D} = \overrightarrow{D^+} - \overrightarrow{D^-}$ un diviseur numéroté associé à E , où D^+ et D^- sont effectifs.

Soit $\mathcal{S}_{-\overrightarrow{D^\pm}}$ une suite exacte de fibrés vectoriels holomorphes réels associée à la transformation élémentaire réelle négative en $\overrightarrow{D^\pm}$ de la suite \mathcal{S} . Alors,

- (i) une orientation sur une composante orientable de $\mathbb{R}E$ induit naturellement une orientation sur la composante correspondante de $\mathbb{R}E_{-\overrightarrow{D^\pm}}$,
- (ii) une orientation de $(\mathbb{R}N)_{x_i}$ pour x_i dans le support réel de D^+ induit naturellement une orientation sur $(\mathbb{R}E_{-\overrightarrow{D^+}})_{x_i}$.

Démonstration. — (i) Ce premier point est immédiat car on n'effectue pas de transformation sur les composantes de $\mathbb{R}E$ qui sont déjà orientables.

- (ii) Prenons un point $x \in \mathbb{R}\Sigma_g$ dans la support de D^+ . D'après le Lemme 3.16 on a un isomorphisme canonique

$$(N_{-\overrightarrow{D^+}})_x = T_x^* \Sigma_g \otimes N_x.$$

Donc, une orientation de $(\mathbb{R}N)_x$ induit canoniquement une orientation de $T_x^* \mathbb{R}\Sigma_g \otimes (\mathbb{R}N_{-\overrightarrow{D^+}})_x = \det(\mathbb{R}E_{-\overrightarrow{D^+}})_x$.

□

Lemme 5.5. — En reprenant les notations du Lemme 5.4, si $\mathcal{S}_{-\overrightarrow{D^\pm}}$ et $\mathcal{S}'_{-\overrightarrow{D^\pm}}$ sont deux suites exactes de fibrés vectoriels holomorphes réels associées à la transformation élémentaire réelle négative en $\overrightarrow{D^\pm}$ de la suite \mathcal{S} , alors il existe un isomorphisme (F, f) entre $\mathcal{S}_{-\overrightarrow{D^\pm}}$ et $\mathcal{S}'_{-\overrightarrow{D^\pm}}$ tel que

- (i) le diagramme suivant commute

$$\begin{array}{ccc} \text{Det}(N) & \xlongequal{\quad\quad\quad} & \text{Det}(N) \\ \downarrow & & \downarrow \\ \left((t_{-\overrightarrow{D^+}})^* \text{Det}(N_{-\overrightarrow{D^+}}) \right) \otimes \det(N_{|\overrightarrow{D^+}}) & \xrightarrow{f} & \left((t'_{-\overrightarrow{D^+}})^* \text{Det}(N'_{-\overrightarrow{D^+}}) \right) \otimes \det(N_{|\overrightarrow{D^+}}), \end{array}$$

- (ii) et étant données des orientations des composantes orientables de $\mathbb{R}E$ et des orientations des $(\mathbb{R}N)_{x_i}$ pour x_i dans le support de D^+ , F préserve les orientations induites sur les composantes de $\mathbb{R}E_{-\overrightarrow{D^\pm}}$ et $\mathbb{R}E'_{-\overrightarrow{D^\pm}}$.

Démonstration. — Les deux isomorphismes F et f sont induits par les isomorphismes naturels

$$\begin{aligned} \mathcal{O}(N_{-\overrightarrow{D^\pm}}, c_{N, -\overrightarrow{D^\pm}}) &= \mathcal{N}_{-\overrightarrow{D^\pm}} = \mathcal{O}(N'_{-\overrightarrow{D^\pm}}, c_{N', -\overrightarrow{D^\pm}}), \\ \mathcal{O}(E_{-\overrightarrow{D^\pm}}, c_{E, -\overrightarrow{D^\pm}}) &= \mathcal{E}_{-\overrightarrow{D^\pm}} = \mathcal{O}(E'_{-\overrightarrow{D^\pm}}, c_{E', -\overrightarrow{D^\pm}}), \end{aligned}$$

où l'on a noté avec un \mathcal{O} le faisceau des sections holomorphes d'un fibré holomorphe. Les propriétés (i) et (ii) découlent alors des Lemmes 3.15 et 3.16. \square

La démonstration de la Proposition 5.2 se fait en deux temps. Nous étudions tout d'abord le cas où N est de rang un à l'aide de transformations élémentaires, puis nous passons au cas du rang supérieur en utilisant notamment le Lemme 5.6.

Lemme 5.6. — *Soit M un fibré vectoriel réel sur le cercle S^1 de rang m au moins deux.*

- (i) *Il existe une bijection canonique $\text{Pin}^-(M) \rightarrow \text{Pin}^-(M \oplus (\det(M))^*)$.*
- (ii) *Si M est orientable, il existe une bijection canonique $\text{Pin}^+(M) \rightarrow \text{Pin}^+(M \oplus (\det(M))^*)$.*
- (iii) *Si M n'est pas orientable, alors chaque orientation du cercle induit canoniquement une bijection $\text{Pin}^+(M) \rightarrow \text{Pin}^+(M \oplus (\det(M))^*)$. Les deux bijections obtenues sont différentes.*

Démonstration. — Le premier cas est traité dans le Lemme 1.7 de [17]. Pour le second cas, on remarque qu'une structure Pin^+ sur M est donnée par une décomposition de M en somme de fibrés en droites réelles orientables sur S^1 . Une telle décomposition induit une décomposition du même type de $M \oplus \det(M)$, donc une structure Pin^+ sur $M \oplus \det(M)$.

Passons au troisième cas. La démonstration est analogue à celle du Lemme 1.7 de [17] mais nous la donnons complètement. Fixons une fois pour toute un des éléments e de l'algèbre de Clifford de $\mathbb{R}^m \oplus \mathbb{R}$ qui se projette dans $O_n(\mathbb{R})$ sur la réflexion par rapport au dernier facteur \mathbb{R} et vérifiant $e^2 = 1$. Prenons une orientation de S^1 , deux intervalles ouverts U_0 et U_1 recouvrant le cercle, des fonctions de transition pour M $g_{ij} : U_i \cap U_j \rightarrow O_m(\mathbb{R})$, et une structure Pin^+ sur M donnée par des relevés $G_{ij} : U_i \cap U_j \rightarrow \text{Pin}_m^+(\mathbb{R})$ de g_{ij} . L'intersection $U_0 \cap U_1$ est formée de deux composantes connexes V_0 et V_1 que l'on numérote de façon à ce que $\det(g_{01}) = 1$ sur V_0 et $\det(g_{01}) = -1$ sur V_1 . Quitte à changer la numérotation, on peut supposer que si l'on passe de U_0 à U_1 en suivant l'orientation donnée sur S^1 , alors on traverse V_0 avant de sortir de U_0 (voir Figure 1).

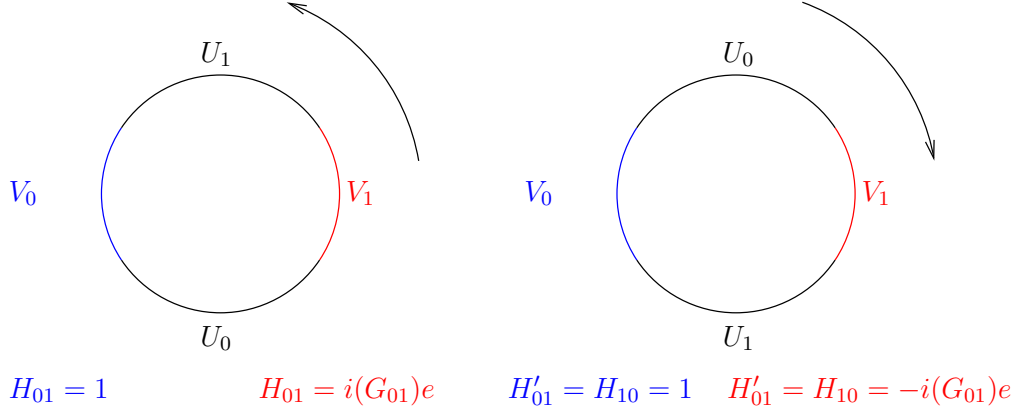
Notons i l'inclusion naturelle de $\text{Pin}_m^+(\mathbb{R})$ dans $\text{Pin}_{m+1}^+(\mathbb{R})$. On définit alors une structure Pin^+ sur $M \oplus (\det(M))^*$ en recollant $U_0 \times \text{Pin}_{m+1}^+(\mathbb{R})$ à $U_1 \times \text{Pin}_{m+1}^+(\mathbb{R})$ par les fonctions de transition

$$\begin{array}{lll} H_{01} = 1 & H_{10} = H_{01}^{-1} = 1 & \text{sur } V_0 \\ H_{01} = i(G_{01})e & H_{10} = H_{01}^{-1} = -i(G_{01})e & \text{sur } V_1. \end{array}$$

On a utilisé ici le fait que $i(G_{01})$ et e anticommulent car $\det(g_{01}) = -1$ sur V_1 .

Si on change l'orientation de S^1 , la structure obtenue change aussi. En effet, si on avait la même alors il existerait deux applications $\tilde{f}_i : U_i \rightarrow \text{Pin}_{m+1}^+(\mathbb{R})$, $i = 0, 1$ telles que

1. $\pi(\tilde{f}_i) = id \in O_{m+1}(\mathbb{R})$, où $\pi : \text{Pin}_{m+1}^+(\mathbb{R}) \rightarrow O_{m+1}(\mathbb{R})$ est le revêtement double,
2. sur V_0 , $\tilde{f}_0 = \tilde{f}_1$,

FIGURE 1. Structures Pin^+ sur $M \oplus (\det(M)^*)$

3. sur V_1 , $-i(G_{01})e\tilde{f}_0 = \tilde{f}_1 i(G_{01})e$.

Les deux premières conditions impliquent que $\tilde{f}_0 = \pm 1 = \tilde{f}_1$ sur V_0 . La troisième condition est alors impossible à réaliser. Les deux structures obtenues sont bien distinctes. \square

Fixons quelques notations avant de passer à la démonstration de la Proposition 5.2.

Notation 2. — Pour tout $J \in \mathbb{R}J(\Sigma_g)$ et $n \in \mathbb{N}$, on note $(E_{J,n}, c_{E,J,n}, \bar{\partial}_{E,J,n}) = (T\Sigma_g \oplus K_\Sigma \oplus \mathbb{C}^n, c_{T\Sigma_g \oplus K_\Sigma \oplus \mathbb{C}^n}, \bar{\partial}_{T\Sigma,J} \oplus \bar{\partial}_{K_\Sigma,J} \oplus \bar{\partial}_{\mathbb{C}^n,J}^{\oplus n})$ et $(N_{J,n}, c_{N,J,n}, \bar{\partial}_{N,J,n}) = (K_\Sigma \oplus \mathbb{C}^n, c_{K_\Sigma \oplus \mathbb{C}^n}, \bar{\partial}_{K_\Sigma,J} \oplus \bar{\partial}_{\mathbb{C}^n,J}^{\oplus n})$. Ce sont deux fibrés holomorphes réels sur (Σ_g, c_Σ) qui rentrent dans la suite exacte

$$\mathcal{S}_{J,n} : 0 \rightarrow (T\Sigma_g, dc_\Sigma, \bar{\partial}_{T\Sigma,J}) \rightarrow (E_{J,n}, c_{E,J,n}, \bar{\partial}_{E,J,n}) \rightarrow (N_{J,n}, c_{N,J,n}, \bar{\partial}_{N,J,n}) \rightarrow 0.$$

Démonstration de la Proposition 5.2. — **Premier cas :** $\text{rg}(N) = 1$. Fixons $\vec{D} = \vec{D}^+ - \vec{D}^-$ un diviseur numéroté associé à E , où D^+ et D^- sont effectifs. En reprenant les notations du Lemme 5.4, on effectue la transformation élémentaire réelle négative en \vec{D}^+ de la suite \mathcal{S} et la transformation élémentaire réelle négative en \vec{D}^- de la suite $\mathcal{S}_{J,0}$ pour obtenir deux suites exactes de fibrés vectoriels complexes $\mathcal{S}_{-\vec{D}^+}$ et $\mathcal{S}_{J,0,-\vec{D}^-}$ qui sont isomorphes. Nous avons aussi d'après le Lemme 5.5 deux isomorphismes canoniques

$$(*) \quad \begin{aligned} \text{Det}(N) &= ((t_{-\vec{D}^+})^* \text{Det}(N_{-\vec{D}^+})) \otimes \det(N_{|\vec{D}^+}) \\ \text{Det}(\bar{\partial}_{K_\Sigma,J}) &= \text{Det}(\bar{\partial}_{K_\Sigma,J,-\vec{D}^-}) \otimes \det((K_\Sigma)_{|\vec{D}^-}). \end{aligned}$$

On remarque maintenant que la partie réelle du fibré $E_{J,0} = T\Sigma_g \oplus K_\Sigma$ est naturellement orientée. D'après le Lemme 5.4, la partie réelle du fibré $E_{J,0,-\vec{D}^-}$ est naturellement munie d'orientations.

D'autre part, pour chaque choix d'orientation des composantes orientables de $\mathbb{R}E$ et des fibres $(\mathbb{R}N)_x$ pour $x \in \mathbb{R}\Sigma_g$ dans le support de D^+ on obtient une orientation de $\mathbb{R}E_{-\vec{D}^+}$, d'après le Lemme 5.4. De plus, les composantes de $\mathbb{R}E_{-\vec{D}^+}$ (resp. de

$\mathbb{R}E_{J,0,-\overrightarrow{D^-}}$) héritent d'une structure Pin^\pm naturelle venant de la suite exacte $\mathcal{S}_{-\overrightarrow{D^+}}$ (resp. de $\mathcal{S}_{J,0,-\overrightarrow{D^-}}$). Prenons alors un isomorphisme (F, f) entre $\mathcal{S}_{-\overrightarrow{D^+}}$ et $\mathcal{S}_{J,0,-\overrightarrow{D^-}}$ tel que F envoie les orientations choisies et les structures Pin^\pm naturelles de $\mathbb{R}E_{-\overrightarrow{D^+}}$ sur les orientations et structures Pin^\pm naturelles de $\mathbb{R}E_{J,0,-\overrightarrow{D^-}}$. D'après le Corollaire 3.1 et le Lemme 5.3 deux tels choix d'isomorphismes induisent la même correspondance entre les orientations de $\text{Det}(N_{-\overrightarrow{D^+}})$ et celles de $\text{Det}((K_\Sigma)_{-\overrightarrow{D^+}})$. En combinant avec les isomorphismes $(*)$, on obtient un isomorphisme

$$\text{Det}(N) = \text{Det}(\bar{\partial}_{K_\Sigma, J}) \otimes \det((K_\Sigma)_{|\overrightarrow{D^-}}) \otimes \det(N_{|\overrightarrow{D^+}}).$$

De plus, d'après le Lemme 4.3, nous avons un isomorphisme naturel

$$\text{Det}(\bar{\partial}_{K_\Sigma}) = \det(H^1(\Sigma_g, \mathbb{R})_{-1}).$$

Différents choix d'orientation des composantes orientables de $\mathbb{R}E$ et des fibres $(\mathbb{R}N)_x$ pour $x \in \mathbb{R}\Sigma_g$ dans le support de D^+ donnent différents isomorphismes. Grâce au Lemme 5.4 et au Corollaire 3.1, on a donc un isomorphisme noté $\phi_{\vec{D}}$

$$\begin{aligned} \text{Det}(N) &= \det(H^1(\Sigma_g, \mathbb{R})_{-1}) \otimes \det((K_\Sigma)_{|\overrightarrow{D^-}}) \\ &\quad \otimes \det(N_{|\overrightarrow{D^+}}) \otimes \left(\bigotimes_{i=1}^{k_-} \mathbb{R}N_{x_i} \right) \otimes \bigotimes_{w_1(\mathbb{R}E)([\mathbb{R}\Sigma_g]_i)=0} o((\mathbb{R}E)_i). \end{aligned}$$

On remarque enfin que choisir une orientation sur $\det((K_\Sigma)_{|\overrightarrow{D^-}}) \otimes \det(N_{|\overrightarrow{D^+}-\overrightarrow{D^+}|_{\mathbb{R}\Sigma_g}})$ revient à choisir une orientation de $(H_{c_\Sigma})^{\frac{\deg(E)-k_-}{2}}$ et choisir une orientation de $\det(N_{|\overrightarrow{D^+}|_{\mathbb{R}\Sigma_g}}) \otimes (\bigotimes_{i=1}^{k_-} \mathbb{R}N_{x_i})$ revient à choisir une orientation de $\mathbb{R}_{w_1(\mathbb{R}E)}$. Or ces deux fibrés héritent d'une orientation venant de la numérotation de \vec{D} . L'isomorphisme $\phi_{\vec{D}}$ obtenu donne donc un isomorphisme

$$\text{Det}(N) = \det(H^1(\Sigma_g, \mathbb{R})_{-1}) \otimes \bigotimes_{w_1(\mathbb{R}E)([\mathbb{R}\Sigma_g]_i)=0} o((\mathbb{R}E)_i).$$

D'après le Lemme 5.5, cet isomorphisme ne dépend pas du choix des suites $\mathcal{S}_{-\overrightarrow{D^+}}$ et $\mathcal{S}_{J,0,-\overrightarrow{D^-}}$ fait après les transformations élémentaires.

Si maintenant \vec{D}_t est une famille continue de diviseurs numérotés et associés à E on obtient en répétant le procédé ci-dessus une famille continue d'isomorphismes $\phi_{\vec{D}_t}$. De plus, si \vec{D} et \vec{D}' sont deux numérotations du même diviseur, on voit grâce au Lemme 5.5 qu'ils induisent les mêmes isomorphismes si et seulement si leurs numérotations induisent les mêmes orientations de $(H_{c_\Sigma})^{\frac{\deg(E)-k_-}{2}} \otimes \mathbb{R}_{w_1(\mathbb{R}E)}$.

On obtient donc l'isomorphisme $\phi_{\mathcal{S}}$ voulu. Le caractère canonique de $\phi_{\mathcal{S}}$ découle du Corollaire 3.1 et du Lemme 5.3.

Pour établir que l'isomorphisme est équivariant pour l'action d'un $\varphi \in \mathbb{R}Diff^+(\Sigma_g)$, on peut reprendre la démonstration en faisant les transformations parallèlement pour \mathcal{S} en $\vec{D^+}$ et $\varphi^*\mathcal{S}$ en $\varphi^*\vec{D^+}$, et pour $\mathcal{S}_{J,0}$ en $-\vec{D^-}$ et $\mathcal{S}_{\varphi^*J,0}$ en $-\varphi^*\vec{D^-}$. On conclut alors en utilisant les Lemmes 3.15 et 3.16 et la Proposition 4.3.

Deuxième cas : $\text{rg}(N) = n \geq 2$. Posons $M = N \oplus K_\Sigma \otimes (\det(N))^*$ et $G = E \oplus K_\Sigma \otimes (\det(N)^*)$. Le fibré M est donc de degré $2g - 2$ et nous avons une

suite exacte

$$\tilde{\mathcal{S}} : 0 \rightarrow (T\Sigma_g, dc_\Sigma) \rightarrow (G, c_G) \rightarrow (M, c_M) \rightarrow 0,$$

qui est isomorphe à la suite $\mathcal{S}_{J,n}$. De plus, comme $\det(G) = \det(E) \otimes (\det(E))^* = \mathbb{C}$, la partie réelle de G est naturellement munie d'orientations. Notons que le fibré $\mathbb{R}E_{J,n}$ admet des orientations et des structure Pin^\pm naturelles. Pour chaque choix de structures Pin^\pm sur la partie réelle de G , on prend un isomorphisme (F, f) entre $\tilde{\mathcal{S}}$ et $\mathcal{S}_{J,n}$ tel qu'il envoie les orientations naturelles de $\mathbb{R}G$ et le choix de structure Pin^\pm sur les orientations et structures Pin^\pm naturelles de $\mathbb{R}E_{J,n}$. D'après le Théorème 2.1, le Corollaire 3.1 et le Lemme 5.3 deux tels choix d'isomorphismes induisent la même correspondance entre les orientations de $\text{Det}(M)$ et $\text{Det}(N_{J,n})$. D'après les Lemmes 4.2, 4.3 et 5.6, on a donc deux isomorphismes canoniques

$$(*) \quad \text{Det}(M) = \det(H^1(\Sigma_g, \mathbb{R})_{-1})^{n+1} \otimes (H_{c_\Sigma})^{k-} \otimes \bigotimes_{i=1}^k Pin^+((\mathbb{R}E)_i)$$

et

$$(**) \quad \text{Det}(M) = \det(H^1(\Sigma_g, \mathbb{R})_{-1})^{n+1} \otimes \bigotimes_{i=1}^k Pin^-((\mathbb{R}E)_i).$$

D'autre part, la dualité de Serre et la \mathbb{C} -linéarité des opérateurs considérés nous donnent un isomorphisme $\text{Det}(K_\Sigma \otimes (\det(N))^*) = \text{Det}(\det(N))$. Donc d'après le cas du rang un traité plus haut appliqué à la suite exacte

$$0 \rightarrow (T\Sigma_g, dc_\Sigma) \rightarrow (T\Sigma_g \oplus \det(N), c_{T\Sigma_g \oplus \det(N)}) \rightarrow (\det(N), c_{\det(N)}) \rightarrow 0$$

on a un isomorphisme canonique

$$(***) \quad \text{Det}(K_\Sigma \otimes (\det(N))^*) = \det(H^1(\Sigma_g, \mathbb{R})_{-1}) \otimes (H_{c_\Sigma})^{\frac{\deg(E)-k-}{2}} \otimes \mathbb{R}_{w_1(\mathbb{R}E)} \otimes \bigotimes_{w_1(\mathbb{R}E)([\mathbb{R}\Sigma_g]_i)=0} o((\mathbb{R}E)_i).$$

Maintenant, pour chaque $\bar{\partial}_N \in \mathbb{R}\mathcal{C}(N)$, on a un opérateur $\bar{\partial}_{K_\Sigma \otimes (\det(N))^*} \in \mathbb{R}\mathcal{C}(K_\Sigma \otimes (\det(N))^*)$ donné par la dualité de Serre. Ceci nous donne une application $\mathbb{R}\mathcal{C}(N) \rightarrow \mathbb{R}\mathcal{C}(K_\Sigma \otimes (\det(N))^*) \times \mathbb{R}\mathcal{C}(M)$ et nous permet donc de restreindre les fibrés $\text{Det}(K_\Sigma \otimes (\det(N))^*)$ et $\text{Det}(M)$ à $\mathbb{R}\mathcal{C}(N)$. Nous avons de plus un isomorphisme canonique

$$\text{Det}(N) = \text{Det}(M)|_{\mathbb{R}\mathcal{C}(N)} \otimes \text{Det}(K_\Sigma \otimes (\det(N))^*)|_{\mathbb{R}\mathcal{C}(N)}.$$

En combinant ce dernier avec les isomorphismes $(*)$, $(**)$ et $(***)$, on obtient les isomorphismes $\phi_{\tilde{\mathcal{S}}}^\pm$ voulus. \square

5.3.2. Le cas *Spin*. —

Proposition 5.3. — Soit $J_\Sigma \in \mathbb{R}J(\Sigma_g)$ et

$$\mathcal{S} : 0 \rightarrow (T\Sigma_g, dc_\Sigma) \rightarrow (E, c_E) \rightarrow (N, c_N) \rightarrow 0$$

une suite exacte de fibrés vectoriels complexes. Supposons que le fibré $\mathbb{R}E$ est orientable. Fixons une structure *Spin* réelle ξ sur E de première classe de Stiefel-Whitney $w \in H^1(\mathbb{R}\Sigma_g, \mathbb{Z}/2\mathbb{Z})$. Si N est de rang un il existe un isomorphisme canonique

$$\phi_{\mathcal{S}, \xi} : \text{Det}(N) \rightarrow \det(H^1(\Sigma_g, \mathbb{R})_{-1}) \otimes \bigotimes_{w([\mathbb{R}\Sigma_g]_i)=1} H^1((\mathbb{R}\Sigma_g)_i, \mathbb{R}) \otimes (O_\xi)^{1-g},$$

où O_ξ est le fibré en droites réelles associé au $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ -fibré principal trivial sur $\text{Det}(N)$ de fibre composée des deux semi-orientations de $\mathbb{R}E$ induites par ξ .

Si N est de rang au moins deux, il existe un isomorphisme canonique

$$\begin{aligned} \phi_{\mathcal{S}, \xi}^\pm : \text{Det}(N) &\rightarrow \det(H^1(\Sigma_g, \mathbb{R})_{-1})^{\text{rg}(N)} \otimes \bigotimes_{w([\mathbb{R}\Sigma_g]_i)=1} H^1((\mathbb{R}\Sigma_g)_i, \mathbb{R}) \\ &\quad \otimes \bigotimes_{i=1}^k \text{Pin}^\pm((\mathbb{R}E)_i) \otimes (O_\xi)^{1-g}. \end{aligned}$$

De plus, tous ces isomorphismes sont équivariants pour l'action de $\mathbb{R}\text{Diff}^+(\Sigma_g)$.

La démonstration de la Proposition 5.3 suit le même schéma que celle de la Proposition 5.2. On commence par traiter le cas où N est de rang un à l'aide de transformations élémentaire et des Lemmes 5.7 et 5.8.

Lemme 5.7. — Soit $J_\Sigma \in \mathbb{R}J(\Sigma_g)$ et

$$\mathcal{S} : 0 \rightarrow (T\Sigma_g, \text{dc}_\Sigma, \bar{\partial}_{T\Sigma, J_\Sigma}) \rightarrow (E, c_E, \bar{\partial}_E) \rightarrow (N, c_N, \bar{\partial}_N) \rightarrow 0$$

une suite exacte de fibrés vectoriels holomorphes réels, où N est de rang un. Supposons fixée une structure *Spin* réelle ξ sur E de première classe de Stiefel-Whitney $w \in H^1(\mathbb{R}\Sigma_g, \mathbb{Z}/2\mathbb{Z})$. Prenons un point x_i sur chaque composante $(\mathbb{R}\Sigma_g)_i$ de la partie réelle de Σ_g sur laquelle w est non nulle et fixons $\vec{D} = \sum_i 2x_i + 2l(z + \bar{z})$ un diviseur effectif avec $l \geq 0$.

Soit $\mathcal{S}_{-\vec{D}}$ une suite exacte de fibrés vectoriels holomorphes réels associée à la tranformation élémentaire réelle négative en \vec{D} de la suite \mathcal{S} . Alors $E_{-\vec{D}}$ est naturellement muni d'une structure *Spin* réelle $\xi_{-\vec{D}}$ de première classe de Stiefel-Whitney nulle. De plus, le choix d'une orientation sur $\mathbb{R}E$ associée à la semi-orientation fixée par ξ induit naturellement une orientation sur $\mathbb{R}E_{-\vec{D}}$ associée à la semi-orientation fixée par $\xi_{-\vec{D}}$.

Démonstration. — La structure *Spin* réelle ξ est donnée par une racine carrée L_ξ du fibré en droites holomorphe $(\det(E), \bar{\partial}_{\det(E)})$. Le fibré en droites $(L_\xi)_{-\frac{\vec{D}}{2}} \cong L_\xi \otimes \mathcal{O}(-\frac{\vec{D}}{2})$ est alors une racine carrée de $(\det(E_{-\vec{D}}), \bar{\partial}_{E_{-\vec{D}}})$ et donne donc une structure *Spin* réelle sur $E_{-\vec{D}}$ de première classe de Stiefel-Whitney nulle.

Pour les orientations, fixons un isomorphisme $\alpha : L_\xi^2 \rightarrow (\det(E), \bar{\partial}_E)$ et une structure réelle sur L_ξ rendant α réel. On a alors choisi une des orientations associée à la semi-orientation donnée par L_ξ . En effet, en prenant le carré d'une section méromorphe réel s_ξ de L_ξ , on obtient alors une section méromorphe s_ξ^2 de $(\det(E), \bar{\partial}_E)$ dont les zéros et les pôles sont d'ordres pairs, ce qui induit des

orientations sur $\mathbb{R}E$. D'autre part, le fibré $(L_\xi)_{-\frac{\vec{D}}{2}}$ hérite d'une structure réelle venant de celle de L_ξ . Puis, l'isomorphisme α induit un isomorphisme $\alpha_{-\vec{D}}$ donné par

$$\begin{array}{ccccc} 0 & \rightarrow & (L_\xi)_{-\frac{\vec{D}}{2}}^2 & \rightarrow & (L_\xi)^2 \\ & & \alpha_{-\vec{D}} \downarrow & & \downarrow \alpha \\ 0 & \rightarrow & \det(E_{-\vec{D}}) & \rightarrow & \det(E). \end{array}$$

On obtient donc une orientation sur $\mathbb{R}E_{-\vec{D}}$ qui est associée à la semi-orientation de $\xi_{-\vec{D}}$. \square

Lemme 5.8. — *En reprenant les notations du Lemme 5.7, si $\mathcal{S}_{-\vec{D}}$ et $\mathcal{S}'_{-\vec{D}}$ sont deux suites exactes de fibrés vectoriels holomorphes réels associées à la transformation élémentaire réelle négative en \vec{D} de la suite \mathcal{S} , alors il existe un isomorphisme (F, f) entre $\mathcal{S}_{-\vec{D}}$ et $\mathcal{S}'_{-\vec{D}}$ tel que*

(i) *le diagramme suivant commute*

$$\begin{array}{ccc} \text{Det}(N) & \xlongequal{\quad\quad\quad} & \text{Det}(N) \\ \downarrow & & \downarrow \\ \left((t_{-\vec{D}^\dagger})^* \text{Det}(N_{-\vec{D}^\dagger})\right) \otimes \det(N_{|\vec{D}^\dagger}) & \xrightarrow{f} & \left((t'_{-\vec{D}^\dagger})^* \text{Det}(N'_{-\vec{D}^\dagger})\right) \otimes \det(N_{|\vec{D}^\dagger}), \end{array}$$

(ii) *F envoie $\xi_{-\vec{D}}$ sur $\xi'_{-\vec{D}}$, et étant donnée une orientation sur $\mathbb{R}E$ associée à ξ , F préserve les orientations induites sur $\mathbb{R}E_{-\vec{D}}$ et $\mathbb{R}E'_{-\vec{D}}$.*

Démonstration. — La démonstration est la même que celle du Lemme 5.5. \square

Démonstration de la Proposition 5.3. — **Premier cas :** $\text{rg}(N) = 1$. La démonstration dans ce cas est presque identique à celle de la Proposition 5.2. Nous nous contentons d'en donner le schéma. Nous fixons un point x_i sur chaque composante de $\mathbb{R}\Sigma_g$ sur laquelle w est non nulle et prenons un diviseur $\vec{D} = \sum_{i=1}^l 2x_i + 2 \frac{\deg(E) - 2l}{4} (z + \bar{z}) = \vec{D}^+ - \vec{D}^-$, où \vec{D}^+ et \vec{D}^- sont effectifs. On effectue la transformation élémentaire réelle négative en \vec{D}^+ (resp. en \vec{D}^-) de \mathcal{S} (resp. de $\mathcal{S}_{J,0}$). On remarque de plus que $E_{J,0}$ admet une structure *Spin* naturelle ξ_0 correspondant à la racine carrée triviale de $(\det(E_{J,0}), c_{\det(E_{J,0})}, \bar{\partial}_{\det(E_{J,0})}) = (\mathbb{C}, \text{conj}, \bar{\partial}_{\mathbb{C}, J_\Sigma})$, et que sa partie réelle hérite d'une orientation compatible avec ξ_0 . En utilisant les Lemmes 5.3 et 5.7 et le Corollaire 3.1, on parvient alors à relier les deux suites exactes obtenues après les transformations élémentaires. On obtient alors de la même façon que dans la Proposition 5.2, grâce au Lemme 4.3 un isomorphisme canonique $\phi_{\mathcal{S}, \xi}$

$$\text{Det}(N) = \det(H^1(\Sigma_g, \mathbb{R})_{-1}) \otimes \bigotimes_{w([\mathbb{R}\Sigma_g]_i)=1} H^1((\mathbb{R}\Sigma_g)_i, \mathbb{R}) \otimes (O_\xi)^{1-g}.$$

Deuxième cas : $\text{rg}(N) = n \geq 2$. Le raisonnement est à nouveau identique à celui de la Proposition 5.2. En reprenant les notations adoptées dans la démonstration de la Proposition 5.2, il nous suffit de remarquer que $G = E \oplus K_\Sigma \otimes (\det(N))^*$

est naturellement muni d'une structure *Spin* et que $\mathbb{R}G$ est naturellement orienté de façon compatible avec celle-ci. On obtient alors grâce au Lemme 5.3 et au Corollaire 3.1 un isomorphisme canonique

$$\text{Det}(M) = \det(H^1(\Sigma_g, \mathbb{R})_{-1})^{n+1} \otimes \bigotimes_{i=1}^k \text{Pin}^\pm((\mathbb{R}E)_i).$$

On conclut de la même façon que dans la démonstration de la Proposition 5.2. \square

5.4. Démonstration des Théorèmes 5.1 et 5.2

Avant de démontrer les Théorèmes 5.1 et 5.2, rappelons la Proposition suivante qui est démontrée dans [30].

Proposition 5.4. — *L'ensemble des courbes $[u, J_\Sigma, J, \underline{z}] \in \mathbb{R}_\tau \mathcal{M}_{g,m}^d(X)$ pour lesquelles u n'est pas une immersion est une sous-variété immergée de codimension $n-1$ dans $\mathbb{R}_\tau \mathcal{M}_{g,m}^d(X)$.* \square

Comme nous supposons que X est de dimension $2n$ au moins 6, nous avons $n-1 \geq 2$ et nous pouvons donc nous restreindre à considérer des courbes immergées pour étudier l'orientabilité de $\mathbb{R}_\tau \mathcal{M}_{g,m}^d(X, J)$.

Démonstration des Théorèmes 5.1 et 5.2. — Les démonstrations pour les deux Théorèmes sont identiques. Traitons par exemple le cas *Spin*. D'après la Proposition 5.4, il nous suffit de considérer les différents fibrés en droites réelles seulement au-dessus des courbes immergées. Considérons donc $(u, J_\Sigma, J, \underline{z}, \xi) \in \mathbb{R}_\tau \mathcal{P}_{g,m}^{d, \text{Spin}}(X)$ une courbe immergée. Prenons un chemin continu d'opérateurs de Cauchy-Riemann généralisés sur N_u joignant \overline{D}_u à un opérateur \mathbb{C} -linéaire. D'après la Proposition 5.3, ce chemin induit un isomorphisme canonique

$$\text{Det}(N)_u = \det(H^1(\Sigma_g, \mathbb{R})_{-1})_u^{n-1} \otimes (H_w^1(\mathbb{R}\Sigma_g, \mathbb{R}))_u \otimes (O_X^{\text{Spin}})_u^{1-g} \otimes \mathfrak{P}_u^\pm.$$

De plus, celui-ci est équivariant pour l'action de $\mathbb{R}Diff^+(\Sigma_g)$. Enfin, comme l'espace des opérateurs de Cauchy-Riemann généralisés sur N_u est affine, l'isomorphisme obtenu ne dépend pas du chemin choisi. On obtient ainsi l'isomorphisme canonique voulu. \square

En guise de remarque finale, nous démontrons la Proposition 5.5 qui découle directement des Théorèmes 5.1 et 5.2 mais dont la démonstration donnée ici nous permet de relier plus directement les résultats du §4 avec les espaces de modules.

Proposition 5.5. — *La première classe de Stiefel-Whitney du fibré $\overline{\text{Det}}$ sur $\mathbb{R}_\tau^{\text{sep}} \mathcal{M}_{g,m}^d(X)$ est égale à celles des deux fibrés*

$$\det(H^1(\Sigma_g, \mathbb{R})_{-1})^{n-1} \otimes H^{\frac{c_1(X)d-k_-}{2}} \otimes \mathbb{R}_w \otimes \mathfrak{P}^- \otimes O_X$$

et

$$\det(H^1(\Sigma_g, \mathbb{R})_{-1})^{n-1} \otimes H^{\frac{c_1(X)d+k_-}{2}} \otimes \mathbb{R}_w \otimes \mathfrak{P}^+ \otimes O_X.$$

Soit $d \in H_2(X, \mathbb{Z})$ tel que $c_1(X)d$ est pair. La première classe de Stiefel-Whitney du fibré $\overline{\text{Det}}$ sur $\mathbb{R}_\tau \mathcal{M}_{g,m}^{d,Spin}(X)$ est égale à celle du fibré

$$\det(H^1(\Sigma_g, \mathbb{R})_{-1})^{n-1} \otimes H_w^1(\mathbb{R}\Sigma_g, \mathbb{R}) \otimes (O_X^{Spin})^{1-g} \otimes \mathfrak{P}^\pm$$

Démonstration de la Proposition 5.5. — Faisons la démonstration dans le cas séparant, l'autre se traitant de la même manière. Fixons $(u, J_\Sigma, J, \underline{z}) \in \mathbb{R}_\tau^{sep} \mathcal{P}_{g,m}^d(X)$ une courbe immergée. Prenons un élément $\varphi \in \mathbb{R} \text{Diff}^+(\Sigma_g, w_1(\mathbb{R}N_u))$ tel que $\varphi.(u, J_\Sigma, J, \underline{z})$ et $(u, J_\Sigma, J, \underline{z})$ sont dans la même composante connexe de $\mathbb{R}_\tau^{sep} \mathcal{P}_{g,m}^d(X)$. Joignons les par un chemin continu $(u_t, (J_\Sigma)_t, J_t, \underline{z}_t)_{t \in [0,1]}$. Prenons des trivialisations $(F_t)_{t \in [0,1]}$ et $(f_t)_{t \in [0,1]}$ des familles de fibrés vectoriels $(E_{u_t}, c_{E_{u_t}})_{t \in [0,1]}$ et $(N_{u_t}, c_{N_{u_t}})_{t \in [0,1]}$ telles que le diagramme

$$\begin{array}{ccccc} E_u & \xrightarrow{\pi} & N_u & \longrightarrow & 0 \\ F_t \downarrow & & \downarrow f_t & & \\ E_{u_t} & \xrightarrow{\pi_t} & N_{u_t} & \longrightarrow & 0 \end{array}$$

commute. On obtient alors un isomorphisme (F_1, f_1) entre la suite

$$0 \rightarrow T\Sigma_g \xrightarrow{F_1 \circ du} E_u \xrightarrow{\pi} N_u \rightarrow 0.$$

et la suite

$$0 \rightarrow T\Sigma_g \xrightarrow{d(u \circ \varphi^{-1})} (\varphi^{-1})^*(E_u) \xrightarrow{\pi} (\varphi^{-1})^*(N_u) \rightarrow 0$$

Soulignons que dans ces deux suites, $T\Sigma_g$ est muni de la structure complexe $(\varphi^{-1})^* J_\Sigma$. Nous avons donc deux isomorphismes $(\varphi^{-1})^* \circ F_1 \in \mathbb{R} \text{Aut}(E_u)$ et $(\varphi^{-1})^* \circ f_1 \in \mathbb{R} \text{Aut}(N_u)$ tels que le diagramme

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & \longrightarrow & T\Sigma_g & \xrightarrow{F_1 \circ du} & E_u & \xrightarrow{\pi} & N \longrightarrow 0 \\ & & \downarrow d\varphi^{-1} & & \downarrow (\varphi^{-1})^* \circ F_1 & & \downarrow (\varphi^{-1})^* \circ f_1 \\ 0 & \longrightarrow & T\Sigma_g & \xrightarrow{du} & E_u & \xrightarrow{\pi} & N \longrightarrow 0 \end{array}$$

commute. Cette fois, $T\Sigma_g$ est muni de la structure J_Σ dans la deuxième suite. Il nous suffit maintenant d'évaluer l'action de l'automorphisme $(\varphi^{-1})^* \circ f_1$ sur les orientations de $\text{Det}(N_u)$ et de la comparer avec l'action de $((\varphi^{-1})^* \circ F_1, (\varphi^{-1})^* \circ f_1)$ sur les orientations de

$$(*) \quad \det(H^1(\Sigma_g, \mathbb{R})_{-1})_u^{n-1} \otimes H_u^{\frac{c_1(X)d+k_-}{2}} \otimes (\mathbb{R}_w)_u \otimes \mathfrak{P}_u^+ \otimes (O_X)_u$$

et

$$(**) \quad \det(H^1(\Sigma_g, \mathbb{R})_{-1})_u^{n-1} \otimes H_u^{\frac{c_1(X)d-k_-}{2}} \otimes (\mathbb{R}_w)_u \otimes \mathfrak{P}_u^- \otimes (O_X)_u.$$

D'après le Lemme 5.3, le signe de l'action de $(\varphi^{-1})^* \circ f_1$ sur les orientations de $\text{Det}(N_u)$ est donné par le produit de $\det((\varphi^{-1})^*)$ et du signe de l'action de $\Phi = (\varphi^{-1})^* \circ F_1$ sur les orientations de $\text{Det}(E_u)$. On est donc ramené à vérifier que ce dernier signe coïncide avec le signe de l'action de Φ sur les orientations de $(*)$ et $(**)$ multiplié par $\det((\varphi^{-1})^*)$. Nous utilisons pour cela le Corollaire 4.3.

Remarquons tout d'abord qu'il suffit de le vérifier dans un des deux cas car le Lemme 4.1 nous permet alors de conclure. Prenons par exemple le cas $(*)$ et

détaillons chacun des termes apparaissant dans le Corollaire 4.3. Tout d'abord, on retrouve dans le signe $\sigma_E(\varphi^{-1})$ le signe de l'action de Φ sur $\det(H^1(\Sigma_g, \mathbb{R})_{-1})_u^{n-1} \otimes H_u^{\frac{c_1(X)d+k_-}{2}} \otimes (\mathbb{R}_w)_u$ multiplié par $\det((\varphi^{-1})^*)$. Puis, les signes $\varepsilon(\Phi_{p+})$ et $\varepsilon(\Phi_o)$ coïncident respectivement avec l'action de Φ sur \mathfrak{P}_u^+ et sur $(O_X)_u$. On retrouve bien tous les derniers termes du signe donné dans le Corollaire 4.3, ce qui conclut la démonstration de la Proposition 5.5. \square

BIBLIOGRAPHIE

- [1] Enrico ARBARELLO, Maurizio CORNALBA et Phillip A. GRIFFITHS : *Geometry of algebraic curves*, volume 268 de *Grundlehren der mathematischen Wissenschaften*. Springer, 2011.
- [2] Michael ATIYAH : Riemann surfaces and *Spin* structures. *Annales scientifiques de l'École Normale Supérieure*, 22(2):47–62, 1989.
- [3] Michael ATIYAH, Raoul BOTT et Arnold SCHAPIRO : Clifford modules. *Topology*, 3:3–38, 1964.
- [4] Michèle AUDIN et Jacques LAFONTAINE, éditeurs. *Holomorphic curves in symplectic geometry*, volume 117 de *Progress in Mathematics*. Birkhäuser Verlag, 1994.
- [5] Indranil BISWAS, Johannes HUISMAN et Jacques C. HURTUBISE : The moduli space of stable vector bundles over a real algebraic curve. *Mathematische Annalen*, 347:201–233, 2010.
- [6] Indranil BISWAS et Jacques HURTUBISE : Universal bundle over the reals. Trans. Amer. Math. Soc., posted on July 25, 2011, PII S 0002-9947(2011)05345-6 (to appear in print).
- [7] Cheol-Hyun CHO : Counting real J -holomorphic discs and spheres in dimension four and six. *J. Korean Math. Soc.*, 45(5):1427–1442, 2008.
- [8] Alex DEGTYAREV, Ilia ITENBERG et Viatcheslav KHARLAMOV : On the number of components of a complete intersection of real quadrics. Preprint math.AG/0806.4077v2, 2008.
- [9] C. J. EARLE : *On moduli of closed Riemann surfaces with symmetries*, pages 119–130. Advances in the Theory of Riemann Surfaces, Annals of Mathematics Studies 66. Princeton University press and University of Tokyo press, 1971.
- [10] C. J. EARLE et J. EELLS : The diffeomorphism group of a compact Riemann surface. *Bulletin of the American Mathematical Society*, 73(4):557–559, 1967.
- [11] Kenji FUKAYA, Yong-Geun OH, Hiroshi OHTA et Kaoru ONO : *Lagrangian intersection Floer theory : anomaly and obstruction. Part II*, volume 46 de

- AMS/IP Studies in Advanced Mathematics*. American Mathematical Society, Providence, RI, 2009.
- [12] Benedict GROSS et Joe HARRIS : Real algebraic curves. *Annales scientifiques de l'École Normale Supérieure*, 14(2):157–182, 1981.
 - [13] Joe HARRIS : Theta-characteristics on algebraic curves. *Trans. Amer. Math. Soc.*, 271(2):611–638, 1982.
 - [14] Helmut HOFER, Véronique LIZAN et Jean-Claude SIKORAV : On genericity for holomorphic curves in four-dimensional almost-complex manifolds. *The Journal of Geometric Analysis*, 7:149–159, 1998.
 - [15] Sergey IVASHKOVICH et Vsevolod SHEVCHISHIN : Structure of the moduli space in a neighborhood of a cusp-curve and meromorphic hulls. *Inventiones mathematicae*, 136(3):571–602, 1999.
 - [16] Dennis JOHNSON : *Spin* structures and quadratic forms on surfaces. *Journal of the London Mathematical Society*, 22(2):365–373, 1980.
 - [17] Robion KIRBY et Laurence TAYLOR : *Pin* structures on low-dimensional manifolds. In *Geometry of low-dimensional manifolds (Durham, 1989)*, numéro 151 de London Mathematical Society, Lecture note series, pages 177–242. Cambridge University Press, 1990.
 - [18] Shoshichi KOBAYASHI : *Differential geometry of complex vector bundles*, volume 15 de *Publications of the Mathematical Society of Japan*. Princeton University press, 1987.
 - [19] S. KRAVETZ : On the geometry of Teichmüller spaces and the structure of their modular groups. *Ann. Acad. Sci. Fenn. Ser. A I*, 278:1–35, 1959.
 - [20] Herbert LAWSON et Marie-Louise MICHELSON : *Spin geometry*, volume 38 de *Princeton mathematical series*. Princeton University press, 1989.
 - [21] Dusa MCDUFF et Dietmar SALAMON : *J-holomorphic Curves and Symplectic Topology*, volume 52 de *Colloquium Publications*. American Mathematical Society, 2004.
 - [22] Sergei NATANZON : Finite groups of homeomorphisms of surfaces and real forms of complex algebraic curves. *Transactions of the Moscow Mathematical Society*, pages 1–51, 1989.
 - [23] Sergei NATANZON : *Moduli of Riemann surfaces, real algebraic curves, and their superanalogs*, volume 225 de *Translations of mathematical monographs*. American Mathematical Society, 2004.
 - [24] Nicolas PUIGNAU : Sur la première classe de Stiefel-Whitney de l'espace des applications stables réelles vers l'espace projectif. *Ann. Inst. Fourier (Grenoble)*, 60(1):149–168, 2010.

- [25] Mika SEPPÄLÄ : Teichmüller spaces of Klein surfaces. *Ann. Acad. Sci. Fenn. Ser. A I Mathematica Dissertationes*, 15:1–37, 1978.
- [26] Vsevolod SHEVCHISHIN : Pseudoholomorphic curves and the symplectic isotopy problem. Preprint math.SG/0010262, 2000.
- [27] Jake SOLOMON : *Intersection theory on the moduli space of holomorphic curves with lagrangian boundary conditions*. Thèse de doctorat, MIT, 2008.
- [28] Claude VITERBO : Symplectic real algebraic geometry. Non publié, 1999.
- [29] Jean-Yves WELSCHINGER : Real structures on minimal ruled surfaces. *Commentarii mathematici helvetici*, 78:418–446, 2003.
- [30] Jean-Yves WELSCHINGER : Invariants of real symplectic 4-manifolds and lower bounds in real enumerative geometry. *Inventiones mathematicae*, 162(1):195–234, 2005.
- [31] Jean-Yves WELSCHINGER : Spinor states of real rational curves in real algebraic convex 3-manifolds and enumerative invariants. *Duke Mathematical Journal*, 127:89–121, 2005.